Tarea 1.

N.N.M.

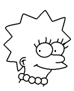
1. Sistemas Axiomáticos: Modelos, Comsistencia, Independencia, Completez.

1.  En las siguientes estructuras, diga (y justifque) cuáles de las proposiciones (**ZF**$_1$–**ZF**$_5$) son verdaderas, con las interpretaciones dadas para $\in$.

   - En $\mathbb{N}$, dando al símbolo $\in$ el **significado** del orden de $\mathbb{N}$ ($\leq$).
   - En $\mathbb{N}$, dando al símbolo $\in$ el **significado** del orden estricto de $\mathbb{N}$ ($<$).
   - En $\mathbb{R}$, dando al símbolo $\in$ el **significado** del orden de $\mathbb{R}$ ($\leq$).
   - En $\mathbb{R}$, dando al símbolo $\in$ el **significado** del orden estricto de $\mathbb{R}$ ($<$).

   ¿Qué puede decir acerca de **ABF**y **ZF**$_6$?

2.  Ejercicio **I.2.4** de las notas sobre Sistemas Axiomáticos.

3.  Ejercicio **I.3.5** de las notas sobre Sistemas Axiomáticos.

4.  Ejercicio **I.4.7** de las notas sobre Sistemas Axiomáticos.

2. Axiomas de la Teoría de Conjuntos II. (ver Notas 1.02, 1.03 y L_03 de El Profesor)

1.  Demuestre que el conjunto cuya existencia es postulado por **ZF**$_5$ es único.

2. Tomemos una propiedad φ de los conjuntos (fija), escrita en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos (es decir, una $\in$–fórmula). Recuerde $\mathbf{ZF_6}$:

$$\forall x \, \exists z \, \forall w \Big((w \in z) \longleftrightarrow \big((w \in x) \ \& \ \varphi(w) \big) \Big)$$

Supongamos que la variable z no ocurre en φ. Demuestre que el conjuntos cuya existencia se postula en $\mathbf{ZF_6}$ es único.

De un ejemplo en que la variable x ocurra en φ y en que no se cumpla el axioma.

3. Use **ABF** y pruebe que:

(a) No hay cadenas finitas cerradas bajo la $\in$.

(b) No hay cadenas infinitas "hacia abajo" con la $\in$.

4. Sea A una clase. Pruebe las siguientes afirmaciones[1].

- $\bigcap \emptyset = \mathscr{V}$. Es decir; $\bigcap \emptyset \notin \mathscr{V}$, o bien; $\bigcap \emptyset$ no existe.
- Si $A \neq \emptyset$, entonces $\bigcap A$ es el $\subseteq$–mayor conjunto contenido en todos los "elementos" de A. De forma simbolica:
  - **i.** $\bigcap A \in \mathscr{V}$.
  - **ii.** $\forall y \big(y \in A \longrightarrow \bigcap A \subseteq y \big)$.
  - **iii.** $\forall x \Big(\forall w \big(w \in A \longrightarrow x \subseteq w \big) \longrightarrow x \subseteq \bigcap A \Big)$.

5. Sea A una clase y $b \in \mathscr{V}$.

- ¿Es cierto que $\bigcup A \in \mathscr{V}$? Demuestre o exhiba un **contraejemplo**.
- Demuestre que $\bigcup b$ es el $\subseteq$–menor conjunto que contiene a *todos* los elementos de b. En símbolos:
  - **i.** $\forall y \big(y \in b \longrightarrow y \subseteq \bigcup b \big)$.
  - **ii.** $\forall x \Big(\forall w \big(w \in b \longrightarrow w \subseteq x \big) \longrightarrow \bigcup b \subseteq x \Big)$.

6. Sea $a \in \mathscr{V}$. Pruebe que el complemento de a no existe[2]. En otras palabras

$$\{ x : x \notin a \} \notin \mathscr{V}.$$

---

[1] Algunas de ellas son metalingüisticas. Es decir, usted probará algunos *metateoremas*.

[2] Esta afirmación es metateorema ¿Porqué?