Tarea 2.

N.N.M.

La finalidad del siguiente ejercicio es ver que si es posible definir el par ordenado de manera distinta a la vista en clase. Recuerde que para que un conjunto "$\langle x,y\rangle_0$" pueda tomar el papel de un par ordenado "decente" debe cumplir

$$\langle u,v\rangle_0 = \langle u',v'\rangle_0 \implies u = u' \;\&\; v = v'.$$

Ejercicio 1. Identifique (y justifique) cuáles de los siguientes conjuntos sirven como pares ordenados:

- $\langle a,b\rangle_1 := \Big\{\{\{a\},\varnothing\},\{\{b\}\}\Big\}$.
- $\langle a,b\rangle_2 := \Big\{\{a,\varnothing\},\{b,\{\varnothing\}\}\Big\}$.
- $\langle a,b\rangle_3 := \Big\{a,\{b\}\Big\}$.
- $\langle a,b\rangle_4 := \Big\{\{a\},\{b,\varnothing\}\Big\}$.
- $\langle a,b\rangle_5 := \Big\{a,\{a,b\}\Big\}$.

Ejercicio 2. Sean R una relacional y A, B clases Demuestre

- $R\left[\bigcup A\right] = \bigcup\{R[x] : x \in A\}$.
- Si $A \neq \varnothing$, $R\left[\bigcap A\right] \subseteq \bigcap\{R[x] : x \in A\}$. ¿La contención es propia? ¿Qué pasa si $A = \varnothing$?
- $R\left[A \setminus B\right] \supseteq R[A] \setminus R[B]$. ¿La contención es propia?

Ejercicio 3. Sean F y G funcionales. Demuestre que son equivalentes:

- $F = G$.
- $DOM(F) = DOM(G)$ & $\forall x \in DOM(F)\big(F(x) = G(x)\big)$.

Ejercicio 4. Sea F una funcional. Demuestre que F^{-1} es funcional si y sólo si F es inyectiva.

Problema. Este ejercicio es opcional. Sean $f : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ y $g : \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{z}$ funciones biyectivas. Demuestre que la composición es biyectiva y que $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b}$ una función. Demuestre las siguientes proposiciones:

- f es inyectiva si y sólo si para todo conjunto $\mathbf{c}$ y cualesquiera funciones $g_1 : \mathbf{c} \longrightarrow \mathbf{a}$, $g_2 : \mathbf{c} \longrightarrow \mathbf{a}$; si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$.
- f es sobre $\mathbf{b}$ si y sólo si para todo conjunto $\mathbf{c}$ y cualesquiera funciones $g_1 : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{c}$, $g_2 : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{c}$; si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $g_1 = g_2$.

OJO: No use que f tiene inversa de algún lado.

Problema. Este ejercicio es opcional. Sean $\mathbf{x} \neq \emptyset, \mathbf{y}$ conjuntos y $f : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ una función. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- f es inyectiva si y sólo si hay una función $g : \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}$[1], tal que $g \circ f = Id_{\mathbf{x}}$.
- Si hay una función $h : \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}$[2], tal que $f \circ h = Id_{\mathbf{y}}$, entonces f es sobre $\mathbf{y}$. ¿Qué se puede decir sobre el regreso?

Ejercicio 6. Sea $\mathscr{F}$ un sistema compatible de funciones. Demuestre las siguientes afirmaciones.

1. $\bigcup \mathscr{F}$ es una funcional.
2. $DOM(\bigcup \mathscr{F}) = \bigcup \left\{ DOM(f) : f \in \mathscr{F} \right\}$.
3. $IMG(\bigcup \mathscr{F}) = \bigcup \left\{ IMG(f) : f \in \mathscr{F} \right\}$.
4. Para todo $f \in \mathscr{F}$ se tiene que $f \subseteq \bigcup \mathscr{F}$.
   Para cualesquiera conjuntos x, y, se tiene que
   $$\langle x, y \rangle \in \bigcup \mathscr{F} \longleftrightarrow \exists f \in \mathscr{F} \big(\langle x, y \rangle \in f \big),$$
   o bien, si $x \in DOM(\bigcup \mathscr{F})$, entonces
   $$\Big(\bigcup \mathscr{F} \Big)(x) = y \longleftrightarrow \exists f \in \mathscr{F} \big(f(x) = y \big).$$

Ejercicio 7. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ conjuntos. Demuestre que ${}^{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \bigcup \{ {}^{\mathbf{x}}\mathbf{b} : x \subseteq a \}$.

Problema. Este ejercicio es opcional. Sean $f : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{c}$ y $g : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b}$ funciones. Demuestre que son equivalentes:

i) Hay una función $h : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{c}$ tal que $f = h \circ g$.

ii) Para cada $x, y \in \mathbf{a}$; si $g(x) = g(y)$, entonces $f(x) = f(y)$.

Problema. Este ejercicio es opcional. Demuestre las siguientes proposiciones

1. $\langle a, Id_a \rangle \in \mathbf{COTO} \Longleftrightarrow \Big(a = \emptyset \vee \exists b \, \big(a = \{ b \} \big) \Big)$.
2. $\langle \wp(a), \subseteq\restriction_{\wp(a)} \rangle \in \mathbf{COTO} \Longleftrightarrow \Big(a = \emptyset \vee \exists b \, \big(a = \{ b \} \big) \Big)$.

[1] A una función g con estas características se le llama *una inversa izquierda de* f.

[2] A una función h con estas características se le llama *una inversa derecha de* f.

Ejercicio 8. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional reflexiva y antisimétrica sobre A. Son equivalentes:

- $\mathbf{R}$ es un orden total [reflexivo] sobre A.
- $\mathbf{R}$ y $(A \times A) \setminus \mathbf{R}$ son transitivas sobre A.

Ejercicio 9. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional transitiva sobre A. Son equivalentes:

- $\mathbf{R}$ es un orden lineal [reflexivo] sobre A.
- $(A \times A) \setminus \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \setminus Id_A$.

Problema. Este ejercicio es opcional. Sean a un conjunto y $\mathscr{F} \neq \emptyset$ una colección cuyos elementos son órdenes parciales estrictos sobre a. ¿Es cierto que $\bigcap \mathscr{F}$ es un orden parcial estricto sobre a?

Problema. Este ejercicio es opcional.

- Suponiendo que $\mathbb{R}$ es conjunto, muestre que ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, la clase de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es conjunto.
- Sean $f, g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Definimos

  $$f \lessdot g \iff \forall x \in \mathbb{R}(f(x) < g(x))$$

  Desmuestre que $\langle {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}, \lessdot \rangle \in \mathbf{COPO}$.
- Sean $f, g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Muestre que $\{f, g\}$ tiene $\lessdot$-supremo y $\lessdot$-ínfimo (exhiba quiénes deben ser y justifique porqué deben ser esos).

Ejercicio 10. Demuestre la proposición 1 de las notas 2.02 (Naturales B) de El Profesor (las equivalencias de "n es un número natural").

Problema. Este ejercicio es opcional. Suponga **ABF**. Demuestrelas siguientes afirmaciones.

- La funcional sucesor $(\_)^+ : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$ es inyectiva.
- La funcional sucesor no tiene puntos fijos, es decir;

  $$\neg \exists x \left(x^+ = x\right)$$