# TAREA:

**I**. Prueba las siguientes afirmaciones.

**1**. $\langle 0,1\rangle \sim \langle 0,1]$

**2**. $\langle 0,1\rangle \sim [0,1]$

**II**. Con respecto a $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \sim \langle 0,1\rangle,$ considera la prueba que dió Cantor, la del "peine". ¿Qué errores cometió en ella? Corrígela o dá otra prueba.

**III**. Sean $a,\ a',\ b,\ b'$ conjuntos arbitrarios. prueba las siguientes afirmaciones.

**1**. Si $a \sim a'$ , $b \sim b'$ y $a' \cap b' = \emptyset$, entonces $a \cup b \preceq a' \cup b'$

**2**. Si $a \sim a'$ y $b \sim b'$, entonces $a \times b \sim a' \times b'$

**3**. Si $a \sim a'$ y $b \sim b'$, entonces ${}^{b}a \sim {}^{b'}a'$

**4**. Si $a \sim a'$, entonces $\wp(a) \sim \wp(a')$

**5**. ¿Qué puedes decir de la conversa de la anterior?.

**IV**. (**Principio del palomar para finitos**). Prueba la siguiente afirmación. Sea $n \in \omega.$ Si $n$ objetos son colocados en menos de $n$ casillas, entonces habrá una casilla con más de un objeto.

**V**. Prueba que los subconjuntos de un conjunto finito son finitos, usando inducción sobre la cardinalidad del conjunto.

**VI**. Prueba las siguientes afirmaciones.

**1**. Si $a,b \in FIN$ entonces ${}^{a}b \in FIN.$

**2**. Si $n,m \in \omega$ son tales que $a \sim n$ y $b \sim m,$ entonces ${}^{a}b \sim m^{n}.$

**VII**. $D$ – **CONJUNTOS**.

Ten en mente las definiciones de C–Finito y C–Infinito, las dadas por Cantor, y las de D–Infinito y D–finito, las dadas por Dedekind y recuerda que estamos en **ZF**⁻ (sin **ABF** y sin **AE**)

**Notación**:

$C\text{-}F = \left\{a \ / \ a \text{ es C–Finito}\right\}$ $\qquad$ $C\text{-}I = \left\{a \ / \ a \text{ es C–Infinito}\right\}$

$$D\text{-}F = \{a \ / \ a \text{ es D–Finito}\} \qquad\qquad D\text{-}I = \{a \ / \ a \text{ es D–Infinito}\}$$

**Observaciones**.

**a**). $a \in C\text{-}I$ syss $\forall n \in \omega [n \nsim a]$

**b**). $a \in D\text{-}I$ syss $\exists f \in {}^{a}a \left[ f \text{ es inyectiva y no suprayectiva} \right]$

**c**). $a \in D\text{-}F$ syss $\forall y \subseteq a \, [y \sim a \rightarrow y = a]$

**d**). Se probó en clase que,

$$C\text{-}F \subseteq D\text{-}F \text{ ó, equivalentemente, } D\text{-}I \subseteq C\text{-}I.$$

Uno se pregunta ¿ la contención es propia ?

**Definición**. Un conjunto $a$ es un *Conjunto de Dedekind,* en breve, un $D$*–Conjunto* syss $a \in C\text{-}I$ y $a \in D\text{-}F$.

Prueba las siguientes afirmaciones.

**1**. $a \in C\text{-}I$ syss $\forall n \in \omega \, [n \prec a]$

**2**. $a \in D\text{-}I$ syss $\omega \precsim a$

Como corolario tenemos,

**3**. $a$ es un $D$–conjunto syss $\forall n \in \omega \, [n \prec a]$ Y $\omega \not\precsim a$
(Este resultado nos hace recordar lo que se ha llamado "Infinito en Potencia")

**4**. Si $a$ es un $D$–conjunto, entonces $a$ **no** es Bien Ordenable.
(Sugerencia: Si $a$ es bien ordenable y $C\text{-}I$, entonces $\omega \precsim a$)

**5**. ¿ Qué puedes concluir de **4**. en lo que respecta a nuestra teoría $\mathbf{ZF}^{-}$ ?