COFINALIDAD

El estudio de la exponenciación ordinal nos lleva a analizar la forma de cómo se comportan los ordinales en su parte terminal, dicho de manera coloquial, de "cómo terminan los ordinales". Empezaremos comparando un par de conjuntos –de ordinales– arbitrarios, para continuar con un conjunto y un ordinal y después veremos la comparación a través de funciones, terminaremos con el concepto de **cofinalidad de un ordinal**.

Antes recordemos algunos conceptos y propiedades básicas:

Si a es un conjunto, entonces $\bigcup a$ es el $\subseteq$–menor conjunto que contiene a todos los elementos de a, en símbolos:

i) $\forall x \in a\ (x \subseteq \bigcup a)$

ii) $\forall w \left[\forall x \in a\ (x \subseteq w) \ \rightarrow\ \bigcup a \subseteq w \right]$

Lo cual nos dice que la $\bigcup a$ es el supremo, con respecto a la relacional $\subseteq$, de a, en símbolos $\bigcup a = Sup_{\subseteq}\ a$.

Puesto que el (buen) orden, $<$, de los ordinales es $\in$, o equivalentemente $\subsetneq$, tenemos que si $a \subseteq OR$, entonces $\bigcup a$ es un ordinal que cumple con,

i) $\forall \alpha \in a \left(\alpha \leq \bigcup a \right)$

ii) $\forall \gamma \left[\forall \alpha \in a\ (\alpha \leq \gamma) \ \rightarrow\ \bigcup a \leq \gamma \right]$.

Una forma equivalente (contrapositiva) a **ii**) que usaremos muy frecuentemente es:

ii') $\forall \gamma \left[\gamma < \bigcup a \ \rightarrow\ \exists \alpha \in a\ (\gamma < \alpha) \right]$ (*)

–que, en éste caso, no es otra cosa que una parte de la definición de $\bigcup a$.

De ahora en adelante, sean $a, b \subseteq OR$.

Primeramente veamos la noción que me permite decir que un conjunto de ordinales termina *uno junto con* el otro.

Definición$_1$. Los conjuntos a y b son *Confinales* syss

i) $\forall \alpha \in a\ \exists \beta \in b\ [\alpha \leq \beta]$

ii) $\forall \beta \in b\ \exists \alpha \in a\ [\beta \leq \alpha]$

Ejemplos:

1. $\left\{2n \;/\; n \in \omega\right\}$ y $\left\{2n+1 \;/\; n \in \omega\right\}$ son confinales.

2. $\left\{\aleph_n \;/\; n \in \omega\right\}$ y $\aleph_\omega$ son confinales.

Proposición$_1$.

1. Si a y b son confinales entonces $\bigcup a = \bigcup b.$

2. La conversa de la anterior no es cierta.

3. Supongamos que tanto a y b tienen máximo o bien, ninguno tiene máximo. Así,

si $\bigcup a = \bigcup b$ entonces a y b son confinales.

Prueba:

1. La condición **i**) nos dice que $\bigcup b$ es cota superior de a y por tanto $\bigcup a \leq \bigcup b.$ Análogamente, $\bigcup b \leq \bigcup a.$

2. Como ejemplo considere, $a = \{\omega\}$ y $b = \omega.$ Tenemos que $\bigcup a = \omega = \bigcup b$ y sin embargo a y b no son confinales. Otro contra–ejemplo es tomar a $a = \left\{2n \;/\; n \in \omega\right\}$ y a $b = \omega^+.$

3. Supongamos que ambos tienen un máximo y que $\bigcup a = \bigcup b;$ entonces de aquí tenemos que $Max\ a = Max\ b$ y resultan ser confinales a y $b.$ Supongamos ahora que ninguno tiene máximo y que $\bigcup a = \bigcup b;$ sea $\alpha \in a,$ puesto que a no tiene máximo, tenemos que $\alpha < \bigcup a,$ pero por hipótesis $\bigcup a = \bigcup b,$ así hay un $\gamma \in b$ tal que $\alpha < \beta.$ Análogamente para la otra parte.†

Nos interesa ver ahora el caso en que uno de los conjuntos de ordinales sea un ordinal.

Proposición$_2$. Sea α un ordinal arbitrario. Así,

1. b y α son confinales syss

- **i**). $b \subseteq \alpha$
- **ii**). $\forall \gamma \in \alpha\ \exists \beta \in b\ [\gamma \leq \beta]$

2. b y α^+ son confinales syss

- **i**). $b \subseteq \alpha^+$
- **ii**). $\alpha \in b$

3. Sea $\alpha \in LIM$. Así, b y α son confinales syss

i). $b \subseteq \alpha$

ii). $\forall \gamma \in \alpha\, \exists \beta \in b\, [\gamma < \beta]$

Prueba: **1** y **2** son inmediatas de la definición. Veamos **3**. Para la "ida" solo nos falta la parte **ii**); sea $\gamma \in \alpha$, por ser $\alpha \in LIM$, tenemos que $\gamma < \gamma^+ \in \alpha$, por ser confinales α y b, hay un $\beta \in b$ tal que $\gamma^+ \leq \beta$ y por tanto $\gamma < \beta$. El "regreso" es inmediato (sin importar que α sea límite). †

La última inecuación (**3.ii**) nos recuerda la noción de un conjunto acotado superiormente, en un orden parcial. En nuestro caso estamos hablando de buenos ordenes (ordinales) en los cuales trivialmente se tiene que todo subconjunto está acotado inferiormente, así pues, lo que nos intersaría es saber si un subconjunto está o no acotado superiormente. Por lo que de ahora en adelante,

Si $\langle a, < \rangle \in COBO$ y $b \subseteq a$, diremos que b es *Acotado en* a syss

$$\exists x \in a\, \forall y \in b \left[y \leq x \right]$$

OjO:

- b es *NO–acotado* en a syss

$$\forall x \in a\, \exists y \in b \left[x < y \right]$$

- Compare esta última ecuación con (*).
- Si a tiene máximo, todos sus subconjuntos son acotados.

Con esto y lo anterior podemos resumir.

Proposición$_3$. Para $\alpha \in LIM$, son equivalentes,

a. b y α son confinales.

b. **i**) $b \subseteq \alpha$

ii) $\bigcup b = \alpha \left(= \bigcup \alpha \right)$

c. **i**) $b \subseteq \alpha$

ii) $\forall \gamma \in \alpha\, \exists \beta \in b\, [\gamma < \beta]$

d. **i**) $b \subseteq \alpha$

ii) b es no–acotado en α.

Ahora la idea es analizar el caso en que dados dos conjuntos, ver cuándo uno termina **como el** otro. Esto se hará usando una función y viendo si su imágen es confinal. Una idea que surge natural es, que dicha función fuera monótona estricta creciente o dicho de otra manera, que se tuviera una copia fiel (un isomorfismo) del primero en el segundo conjunto; sin embargo, por razones técnicas nos conviene dejar funciones arbitrarias, que ocasionan cierta anomalías o, si se prefiere, ciertos absurdos (ver el ejemplo **5**, más adelante), todos ellos serán superados. Estando así las cosas, nos podemos remitir a considerar dos ordinales en vez de dos conjuntos arbitrarios de ordinales.

Definición$_2$. β es *Cofinal en* α syss

$$\exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[\, f[\beta] \text{ y } \alpha \text{ son confinales} \,\right]$$

A dicha función se le llama *(un) Testigo de la cofinalidad de* β *en* α.

Observemos que, f es un testigo de que β es cofinal en α syss $f \in {}^{\beta}\alpha$ y

$$\forall \gamma \in \alpha\, \exists \delta \in \beta \left[\gamma \le f(\delta)\right]$$

Ejemplos:

1. α es cofinal en α, cqsea α.

2. $|\alpha|$ es cofinal en α : Cualquier biyección entre α y $|\alpha|$, es testigo de la cofinalidad.

3. Si 0 es cofinal en α entonces $\alpha = 0$ y si β es cofinal en 0 entonces $\beta = 0$.

4. 1 es cofinal en α^+.

5. Casos patológicos:

- Si $\beta > \alpha > 0$, entonces β es cofinal en α.
- Si β es cofinal en α y $\gamma \ge \beta$, entonces γ es cofinal en α.
- β es cofinal en α^+, para todo $\beta \neq 0$.
  Un caso particular es, ω es cofinal en ω^+.
- ω^+ es cofinal en $\omega + \omega$. Un testigo es $n \mapsto \omega + n$, para $n \in \omega$ y $\omega \mapsto 0$.

6. ω es cofinal en ω, en $\omega + \omega$, en $\omega \cdot \omega$, en ω^ω, en ε_0.

7. ω es cofinal en $\aleph_\omega$. Un testigo es: $n \mapsto \aleph_n$, para $n \in \omega$.

8. Tanto ω como $\omega + \omega$ son cofinales en $\aleph_{\omega+\omega}$.

9. Si $\beta \in LIM$ entonces β es cofinal en $\aleph_\beta$: Para $\xi < \beta$, tomar $\xi \mapsto \aleph_\xi$.

10. (**AEN**). ω **no** es cofinal en ω_1. Pues, si f fuera testigo de la cofinalidad,

$$\omega_1 = \bigcup \omega_1 = \bigcup f[\omega] = \bigcup \left\{ f(n) \ / \ n \in \omega \right\}$$

y por tanto, ω_1 sería la unión numerable de conjuntos contables. $\underset{\circ}{\nabla}$!!

Con los ejemplos vistos tenemos que dado un ordinal, hay muchos ordinales que terminan como él, podríamos pensar entonces en tomar un representante de “todas estas maneras de terminar” y quien mejor que el más pequeño, el primero, de todos ellos. Tenemos la siguiente,

Definición$_3$. La *Cofinalidad de* α, $cof(\alpha)$, es el primer ordinal que es cofinal con α. Formalmente:

$$cof : OR \to OR$$

$$cof(\alpha) = \bigcap \left\{ \beta \ / \ \beta \text{ es cofinal en } \alpha \right\}$$

Obsérvese que:

- $$\begin{aligned} cof(\alpha) &= \bigcap \left\{ \beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[f[\beta] \text{ y } \alpha \text{ son confinales} \right] \right\} \\ &= \bigcap \left\{ \beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[\forall \gamma \in \alpha \, \exists \delta \in \beta \left(\gamma \leq f(\delta) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$
- $cof(\alpha)$ es cofinal en α.
- Si β es confinal en α, entonces $cof(\alpha) \leq \beta$.

Proposición$_4$.

1. $cof(\alpha) \leq |\alpha| \leq \alpha$
2. $cof(\alpha) = 0$ syss $\alpha = 0$
3. $cof(\alpha) = 1$ syss $\exists \gamma \ (\alpha = \gamma^+)$
4. $\alpha \in LIM$ syss $cof(\alpha) \in LIM$
5. Sea $\alpha \in LIM$. Así,

$$\begin{aligned} cof(\alpha) &= \bigcap \left\{ \beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[\forall \gamma \in \alpha \, \exists \delta \in b \ (\gamma < f(\delta)) \right] \right\} \\ &= \bigcap \left\{ \beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left(f[\beta] \text{ es no–acotada en } \alpha \right) \right\} \\ &= \bigcap \left\{ \beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[\bigcup f[\beta] = \alpha \right] \right\} \end{aligned}$$

Prueba: Los incisos **1**, **2** y el “regreso” de **3** son inmediatos de los ejemplos anteriores. Para la “ida” en **3**; si f es testigo de que el 1 es cofinal en α, basta tomar $\gamma = f(0)$. Para **5**, no hay nada que decir, todo se sigue de lo antes visto. Veamos **4**. Si $\alpha \notin LIM$, entonces por **2** y **3** tenemos que $cof(\alpha) \notin LIM$. Ahora supongamos que $\alpha \in LIM$. Puesto que $\alpha \neq 0$, tenemos que $cof(\alpha) \neq 0$. Nos falta ver que $cof(\alpha)$ no es un ordinal sucesor y esto es una consecuencia de que si β^+ fuera cofinal en α, entonces también lo sería β. La prueba no es difícil, solo comentaremos que si f es un testigo de la cofinalidad de β^+ en α, entonces $f \upharpoonright \beta$ es testigo de que β es cofinal en α (pues $f[\beta]$ es confinal con α). †

Ejemplos:

1) $cof(0) = 0$		**6**) $cof(\aleph_\omega) = \omega$
2) $cof(\alpha^+) = 1$		**7**) $cof(\aleph_{\omega+\omega}) = \omega$
3) $cof(\omega) = \omega$		**8**) $cof(\aleph_{\varepsilon_0}) = \omega$
4) $cof(\omega+\omega) = \omega$		**9**) Si $\alpha \in LIM$, $cof(\aleph_\alpha) \leq \alpha$
5) $cof(\omega^\omega) = \omega$		**10**) $cof(\omega_1) = \omega_1$ (**AEN**)

Definición$_4$. Sea $\alpha \in OR$.

α es un *Ordinal Regular* syss $cof(\alpha) = \alpha$

α es un *Ordinal Singular* syss $cof(\alpha) < \alpha$

Ejemplos:

	regulares	singulares
	0	α^+ para $\alpha > 1$
	1	$\omega + \omega$
	ω	$\aleph_\omega$
(**AEN**)	ω_1	$\aleph_{\varepsilon_0}$

Un bonito ejercicio es probar que el primer punto fijo de la funcional $\aleph$ es singular.

La cofinalidad no es simétrica, por ejemplo ω es cofinal en 28, pero no al revés; otro ejemplo, bajo la suposición del **AEN**, es: ω_1 es cofinal en ω. Tampoco es transitiva: el 1 es cofinal en ω^+ y ω^+ es cofinal en ω, sin embargo el 1 no es cofinal en ω. Se puede dar la transitiva en algunos casos, veamos algunos que nos ayudarán a obtener resultados importantes para las propiedades de la cofinalidad. Antes, un poco de,

NOTACIÓN:

$\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha$ syss f es testigo de la cofinalidad de α en β y f es monótona.

$\beta \hookrightarrow \alpha$ syss $\exists f \left[\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha \right]$.

Proposición$_5$. Si γ es cofinal en β y $\beta \hookrightarrow \alpha$ entonces γ es cofinal en α, y por tanto $cof(\alpha) \leq \gamma$.

Prueba: Sea $g : \gamma \to \beta$ un testigo de la cofinalidad y sea f tal que $\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha$. Así, la función composición $f \circ g$, es un testigo de que γ es cofinal en α. †

Proposición$_6$. Si δ es cofinal en α y $\beta \hookrightarrow \alpha$ entonces δ es cofinal en β, y por tanto $cof(\beta) \leq \delta$.
Prueba: Sea $g : \delta \to \alpha$, testigo de la cofinalidad de δ en α, y sea f tal que $\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha$.
Definimos,

$$h : \delta \to \beta$$

$$\forall \xi \in \delta, \quad h(\xi) = \bigcap \left\{ \nu \in \beta \ / \ f(\nu) \geq g(\xi) \right\}$$

Observese que h está bien definida, debido a que $f[\beta]$ y α son confinales.
Veamos que h es un testigo de que δ es cofinal en β :
Sea $\nu_0 \in \beta$. Así $f(\nu_0) \in \alpha$ y como $g[\delta]$ y α son confinales, entonces hay un $\xi_0 \in \delta$ tal que $g(\xi_0) \geq f(\nu_0)$. Veamos que $h(\xi_0) \geq \nu_0$. De la definición de h, se tiene que $h(\xi_0) \in \beta$ con la propiedad de que $f(h(\xi_0)) \geq g(\xi_0)$. Ahora bien, como $g(\xi_0) \geq f(\nu_0)$, tenemos que $f(h(\xi_0)) \geq f(\nu_0)$ y debido a la monotonía de f, $h(\xi_0) \geq \nu_0$. †

Corolario$_7$. Si $\beta \hookrightarrow \alpha$ entonces $cof(\beta) = cof(\alpha)$.
Prueba: Supongamos pues que, $\beta \hookrightarrow \alpha$. Por un lado, debido a que $cof(\beta)$ es cofinal en β, por la **Proposición$_5$**, $cof(\alpha) \leq cof(\beta)$. Por otro lado, tenemos que $cof(\alpha)$ es cofinal en α así, por la **Proposición$_6$**, $cof(\beta) \leq cof(\alpha)$. †

Corolario$_8$. Si $\alpha \in LIM$, entonces $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$.
Prueba: Pues $\alpha \hookrightarrow \aleph_\alpha$. †

Proposición$_9$. $cof(\alpha) \hookrightarrow \alpha$.
Es decir, hay una f tal que

$$f : cof(\alpha) \to \alpha$$

i) $f[cof(\alpha)]$ y α son confinales

ii) f es monótona

Prueba: Si α es el cero o es un sucesor, el resultado es inmediato.
Supongamos pues que, $\alpha \in LIM$ y sea $\beta = cof(\alpha)$ (así, $\beta \in LIM$). Por definición, hay (al menos) una $g : \beta \to \alpha$ tal que $\bigcup g[\beta] = \alpha$. Definimos recursivamente,

$$f : \beta \to OR$$

$$\forall \xi < \beta \quad f(\xi) = max \left\{ g(\xi) \, , \, \left(\bigcup f[\xi]\right)^+ \right\}$$

El hecho de que sea función se debe al esquema general de recursión para relacionales bien fundadas (¡verificarlo!).

Af$_1$. $f[\beta] \subseteq \alpha$. Es decir, $f : \beta \to \alpha$.
Veamos que $\forall\xi \in \beta\, [f(\xi) \in \alpha]$ y esto lo haremos por inducción sobre β (1a. forma).
Sea pues $\xi \in \beta$, nuestra Hipótesis Inductiva afirma que

$$\forall\nu < \xi \left[\; f(\nu) \in \alpha \;\right]$$

veamos que $f(\xi) \in \alpha$. Sabemos que $f(\xi) = max\, \left\{g(\xi), \left(\bigcup f[\xi]\right)^+\right\}$.
Por un lado, $g(\xi) \in \alpha$. Por otro lado, la **H.I**. nos dice que α es cota superior de $f[\xi]$ y por tanto $\bigcup f[\xi] \leq \alpha$; pero no es el caso que $\bigcup f[\xi] = \alpha$, pues entonces tendríamos que ξ sería cofinal en α, siendo que $\xi < \beta = cof(\alpha)$; por tanto $\bigcup f[\xi] < \alpha$, finalmente puesto que $\alpha \in LIM$, $\left(\bigcup f[\xi]\right)^+ < \alpha$. Con todo esto, concluimos que $max\, \left\{g(\xi), \left(\bigcup f[\xi]\right)^+\right\} = f(\xi) \in \alpha$.

Af$_2$. $f[\beta]$ es no–acotada en α :
Sea pues $\nu \in \alpha$. Como $g[\beta]$ es no–acotada en α, hay un $\xi_0 \in \beta$ tal que $g(\xi_0) > \nu$.
Ahora bien, como $f(\xi_0) = max\, \left\{g(\xi_o), \left(\bigcup f[\xi_0]\right)^+\right\}$, tenemos que $f(\xi_0) \geq g(\xi_0)$, resumiendo, tenemos $\nu < f(\xi_0)$ con $\xi_0 \in \beta$.

Af$_3$. f es monótona :
Sean $\xi_1, \xi_2 \in \beta$ con $\xi_1 < \xi_2$ veamos que $f(\xi_1) < f(\xi_2)$. Por un lado, tenemos que

$$f(\xi_2) = max\, \left\{g(\xi_2), \left(\bigcup f[\xi_2]\right)^+\right\}$$

por lo que $f(\xi_2) \geq \left(\bigcup f[\xi_2]\right)^+$ $(*)$.
Por otro lado, puesto que $\xi_1 \in \xi_2$, tenemos que $f(\xi_1) \in f[\xi_2]$, por propiedades de la unión, $f(\xi_1) \leq \bigcup f[\xi_2]$ y de aquí que $f(\xi_1) < \left(\bigcup f[\xi_2]\right)^+$ $(**)$.
Finalmente, de $(*)$ y $(**)$, tenemos que $f(\xi_1) < f(\xi_2)$. †

Corolario$_{10}$. $cof(cof(\alpha)) = cof(\alpha)$.
Prueba: Inmediato de la proposición anterior y el **Corolario$_7$**. †

Corolario$_{11}$. $cof(\alpha) \in CAR \cup 2$.
Prueba: Teniendo en cuenta **Prop$_{4.1}$** y el corolario anterior:

$$cof(\alpha) = cof\big(\, cof(\alpha)\, \big) \leq \big|\, cof(\alpha)\, \big| \leq cof(\alpha)$$

con lo que concluimos que $cof(\alpha) = \big|\, cof(\alpha)\, \big|$ (e.d. es un cardinal). El resultado se desprende ahora considerando los 3 casos posibles para α. †

Corolario$_{12}$. $cof(\alpha)$ es un cardinal regular.

Corolario$_{13}$. a) Si α es un ordinal regular entonces $\alpha \in CAR \cup 2$
b) $\forall\alpha\forall\kappa\left[\kappa < \alpha < \kappa^+ \to \alpha \text{ es singular}\right]$

La noción $\beta \hookrightarrow \alpha$, nos trae a la mente la idea de sucesión convergente, recordemos ello y veamos su relación en particular cuando $\alpha \in LIM$ y más interesante, cuando $\alpha \in CAR$.

Definición$_5$. Sea $\beta \in OR$.

1. Diremos que s es una *Sucesión de Ordinales, de Longitud* β, en breve una β–*Sucesión,* syss $s : \beta \to OR$.
Algunas veces usaremos la siguiente notación:

$$\left\langle s_\xi \;/\; \xi < \beta \right\rangle \quad \text{o} \quad \left\langle \; s_\xi \; \right\rangle_{\xi<\beta}$$

para denotar a la misma función s, teniendo en mente que $s_\xi = s(\xi)$.
No confundir a la sucesión que es una función, con su imágen $\left\{ s_\xi \;/\; \xi < \beta \right\}$

2. Sea $s = \left\langle s_\xi \;/\; \xi < \beta \right\rangle$ una β–sucesión. Diremos que s es *(Estrictamente) Creciente* syss para $\xi_1 < \xi_2 < \beta$, se tiene que $s_{\xi_1} < s_{\xi_2}$.

3. Sean $\beta \in LIM$, $s = \left\langle s_\xi \;/\; \xi < \beta \right\rangle$ una β–sucesión creciente y $\alpha \in OR$ tales, que

$$\alpha = \bigcup s[\beta] = \bigcup_{\xi<\beta} s_\xi = \underset{\xi<\beta}{Sup}\; s_\xi$$

Escribiremos:

$$\lim_{\xi<\beta} s_\xi = \lim_{\xi\to\beta} s_\xi = \alpha, \text{ o también, } s_\xi \underset{\xi\to\beta}{\longrightarrow} \alpha$$

y diremos que α es el *Límite de* s o que la sucesión s *Converge* a α.
Obérvese que en este caso, $\alpha \in LIM$ y además $\beta \le \alpha$.

Desde el punto de vista de sucesiones, tenemos que para $\alpha \in LIM$,

$\beta \hookrightarrow \alpha$ syss hay una β–sucesión creciente convergente a α

Dicho de otra manera,

hay una β–sucesión creciente $\left\langle s_\xi \;/\; \xi < \beta \right\rangle$ tal, que $\lim_{\xi<\beta} s_\xi = \alpha$.

La cofinalidad de un ordinal queda expresada en términos de sucesiones crecientes de la siguiente manera; de las sucesiones crecientes convergentes a él, es la de $\in$–menor longitud.

La cofinalidad de α, $cof(\alpha)$, es la $\in$–menor β tal, que hay una β–sucesión convergente a α.

Pasemos a caracterizar las propiedades de ser regular y ser singular, por medio de sucesiones.

Proposición$_{14}$. Sea $\alpha \in LIM$.

1. α es singular syss
Hay una sucesión creciente convergente a α de longitud menor a α.

En símbolos:
Hay una β–sucesión creciente $\left\langle s_\xi \ / \ \xi < \beta \right\rangle$ tal que $\lim\limits_{\xi<\beta} s_\xi = \alpha$ con $\beta < \alpha$.

2. α es regular syss
Toda sucesión creciente convergente a α, tiene longitud α.
En símbolos:
Si $\left\langle s_\xi \ / \ \xi < \beta \right\rangle$ es una β–sucesión creciente con $\lim\limits_{\xi<\beta} s_\xi = \alpha$, entonces $\beta = \alpha$.

Ahora pasamos a expresar a los cardinales como unión de conjuntos de menor tamaño y para esto nos ayudaremos de su cofinalidad.

Proposición$_{15}$. Sea $\kappa \geq \omega$.
κ es la unión de $cof(\kappa)$ conjuntos, cada uno de cardinal menor a κ.

Prueba: Sea $\lambda = cof(\kappa)$. Puesto que $\lambda \hookrightarrow \kappa$, hay una λ–sucesión creciente de elementos de κ, digamos $\left\langle s_\xi \ / \ \xi < \lambda \right\rangle$, tal que $\kappa = \lim\limits_{\xi<\lambda} s_\xi$. Así $\kappa = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} s_\xi$ con $\lambda \leq \kappa$ y $\left| s_\xi \right| \leq s_\xi < \kappa$. †

Esto repercute en ser regular o ser singular.

Proposición$_{16}$. Sea $\kappa \geq \omega$.

1. κ es singular syss
κ es la unión de menos de κ conjuntos, cada uno de cardinal menor a κ.

2. κ es regular syss
La unión de menos de κ conjuntos, cada uno de cardinal menor a κ es menor a κ.

Prueba: La parte **2** sale de **1**. Veamos pues la **1**. La condición de suficiencia es inmediata de la proposición anterior. Veamos la necesidad; supongamos pues, que $\kappa = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} a_\xi$ con $\lambda < \kappa$ y $\left| a_{\xi_0} \right| < \kappa$. Tenemos dos casos:
Si todos los a_ξ son acotados en κ. Al tomar sus supremos, obtenemos que λ es cofinal con κ $\left(\forall \xi < \lambda, \ \xi \mapsto \bigcup a_\xi \right)$.
Supongamos ahora que, hay un $\xi_0 < \lambda$ tal que a_{ξ_0} es no–acotado en κ. Pongamos que $\mu = \left| a_{\xi_0} \right|$. Así, μ es cofinal en κ (cualquier biyección de μ en a_{ξ_0} es testigo de ello). Teniendo pues, que $\mu = \left| a_{\xi_0} \right| < k$.
En ambos casos, hay un ordinal (cardinal) menor a κ que es cofinal en κ. †

Ahora, usando la cofinalidad, veamos a los cardinales como suma de cardinales menores a él.

Proposición$_{17}$(AE). Sea $\kappa \geq w$.

κ es la suma de $cof(\kappa)$ cardinales, cada uno menor a κ.

Prueba: Sean $\lambda = cof(\kappa)$ y $\langle s_\xi \ / \ \xi < \lambda \rangle$ una λ–sucesión creciente tal, que $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} s_\xi$.

Definimos $\{ a_\xi \}_{\xi<\lambda}$, una familia de conjuntos, como sigue,

$$\forall \xi < \lambda, \ a_\xi = \left(s_\xi \setminus \bigcup_{\nu<\xi} s_\nu \right)$$

Así, para $\xi_1 < \xi_2 < \lambda$, se tiene que $a_{\xi_1} \cap a_{\xi_2} \neq \emptyset$ y por tanto,

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} s_\xi = \bigcup_{\xi<\lambda} a_\xi = \left| \bigcup_{\xi<\lambda} a_\xi \right| \underset{\textbf{AE}}{=} \sum_{\xi<\lambda} |\ a_\xi\ |$$

con $|\ a_\xi\ | \leq |\ s_\xi\ | \leq s_\xi < \kappa$. †

Las propiedades de regularidad y singularidad quedarían así,

Proposición$_{18}$(AE). Sea $\kappa \geq \omega$.

1. κ es singular syss
κ es la suma de menos de κ cardinales, cada uno menor a κ.

2. κ es regular syss
La suma de menos de κ cardinales, cada uno menor a κ, es menor a κ.

Prueba: Veamos **1**. Si κ es singular el resultado se sigue de la proposición anterior. Supongamos que,

$$\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \text{ con } \lambda < \kappa \text{ y para toda } \xi < \lambda, \ \kappa_\xi < \kappa$$

Sabemos que $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda \cdot \underset{\xi<\lambda}{Sup} \ \kappa_\xi$ y como $\lambda < \kappa$, forzosamente $\kappa = \underset{\xi<\lambda}{Sup} \ \kappa_\xi$; finalmente usando la **Proposición$_{16.1}$** al hecho de que $\kappa_\xi < \kappa$ para todo $\xi < \lambda$, tenemos que κ es singular. †

Una consecuencia de lo anterior nos lo dá la siguiente,

Proposición$_{19}$(AE). Para $\kappa \geq \omega$ se tiene,

1. κ^+ es regular

2. κ es singular $\rightarrow$ κ es límite

Prueba: **2** es inmediato de **1**. Sea $\kappa \geq \omega$ y supongamos, con la intensión de llegar a una contradicción, que κ^+ es singular. Por la proposición anterior tenemos:

$$\kappa^+ = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$$

con $\lambda < \kappa$ y para toda $\xi < \lambda$, $\kappa_\xi < \kappa$. Pero entonces,

$$\kappa^+ = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \sum_{\xi<\lambda} \kappa = \lambda \cdot \kappa \underset{\lambda<\kappa}{=} \kappa$$

Lo cual es contradictorio. Por tanto κ^+ es regular. †

Los ejemplos que hemos dado de cardinales límites, salvo por ω, han sido de cardinales singulares. Un hecho es que la clase de los cardinales límites y singulares son "confinales" con CAR (¡verifíquelo!). Una pregunta natural es ¿Hay cardinales límites y regulares, distintos a ω?

Supongamos que $\alpha \in LIM$. Así, $\aleph_\alpha > \omega$, $\aleph_\alpha$ es un cardinal límite. También tenemos que,

$$\aleph_\alpha = \underset{\beta<\alpha}{Lim}\ \aleph_\beta$$

con $\left\langle \aleph_\beta \ / \ \beta < \alpha \right\rangle$ una α–sucesión creciente convergente a $\aleph_\alpha$. Si $\aleph_\alpha$ fuera regular, por la **Proposición**$_{14.2}$, tendríamos que $\alpha = \aleph_\alpha$. Es decir, $\aleph_\alpha$ es un punto fijo de la funcional $\aleph$ y por tanto, ¡muy grande! Otra prueba de esto es:

$$\alpha \leq \aleph_\alpha = cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha) \leq \alpha$$

Pero ¿Qué tan grande debe ser? ya que, como sabemos, hay muchos puntos fijos de $\aleph$ que son singulares. Por lo pronto:

Definición$_6$. (**Hausdorff–Kuratowski**)
κ es un (*Cardinal Débilmente) Inaccesible* syss

i) $\kappa > \omega$

ii) κ es límite, y

iii) κ es regular.

Pongamos la fórmula conjuntista: $I(k) \rightleftharpoons \kappa$ es *cardinal inaccesible*

Proposición$_{20}$.

- Todo inaccesible es punto fijo de la funcional $\aleph$.
- No todo punto fijo de la funcional $\aleph$ es inaccesible. †

Es **imposible probar** con los axiomas que tenemos hasta ahora – **ZFC** junto con la suposición de su consistencia– la existencia de cardinales con éstas características (Gödel 1936). En símbolos:

$$CON(\textbf{ZFC}) \Rightarrow \textbf{ZFC} \nvdash \exists\kappa\, I(k)$$

Con esto se obtiene que es consistente, relativamente, el suponer que no los hay. En símbolos:

$$CON(\textbf{ZFC}) \Rightarrow CON(\textbf{ZFC} + \neg\exists\kappa I(k))$$

Lo que uno podría pensar o esperar es que el enunciado fuera un indecidible para **ZFC** –por supuesto, bajo la suposición de la consistencia– pero **probar** que

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZFC} + \exists \kappa I(k))$$

o, equivalentemente

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow \mathbf{ZFC} \nvdash \neg \exists \kappa I(k)$$

¡**Es Imposible**! Esto también se **prueba**.

Así, lo que tenemos es que es más probable que no haya cardinales inaccesibles a que sí. Sin embargo el trabajar bajo la suposición de que existen, amén del interés teórico, ha dado luz a problemas no resueltos el interior de la matemática.