EXPONENCIACIÓN CARDINAL

Pasemos ahora a investigar la exponenciación cardinal, ayudandonos con la herramienta de cofinalidad. Aquí estaremos trabajando en **ZFC**$^-$.

Sabemos muy poco de la exponenciación cardinal, recordemos. Sean $\kappa, \lambda, \mu \in car$.

1. $\kappa^\lambda \underset{\textbf{AE}}{\rightleftharpoons} \left| \, {}^\lambda\kappa \, \right| = \left| \left\{ f \ / \ f : \lambda \to \kappa \right\} \right|$.

2. Para cualesquiera a y b se tiene que $\left| \, a^b \, \right| = \left| \, a \, \right|^{|\, b \,|}$

3. $\kappa^\lambda \bullet \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.

4. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

5. $\lambda < \mu \to \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.

6. $\lambda < \mu \to \lambda^\kappa \leq \mu^\kappa$.

7. $\kappa < 2^\kappa$. Y por tanto, $\kappa^+ \leq 2^\kappa$.

(Recordar: **HC** $\rightleftharpoons 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y **HGC** $\rightleftharpoons \forall \kappa \geq \omega, \ 2^\kappa = \kappa^+$.)

8. Si $2 \leq \kappa \leq \lambda$ y $\lambda \geq \omega$, entonces $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda \left(\underset{\textbf{HGC}}{=} \lambda^+ \right)$.

9. Si $\lambda \geq \omega$, entonces $(\lambda^+)^\lambda = 2^\lambda \left(\underset{\textbf{HGC}}{=} \lambda^+ \right)$.

Un resultado que es útil para el cálculo de la exponenciación nos lo dá la siguiente,

Proposición$_1$. (Fórmula de Hausdorff)

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \bullet \aleph_{\alpha+1}$$

Prueba: Sean $\kappa, \ \lambda \geq \omega$. Veamos que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \bullet \kappa^+$.

Con respecto al orden entre la base y el exponente, tenemos dos casos.

$\kappa^+ \leq \lambda \,]$ Por un lado, por **8**, tenemos que $(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda$.

Y por el otro: Primeramente, $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ y en segundo lugar, puesto que $\kappa^+ \leq \lambda < 2^\lambda$, tenemos $(\kappa)^\lambda \bullet (\kappa^+) = 2^\lambda$.
Así, $(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda \bullet \kappa^+$.

$\lambda < \kappa^+ \Big]$ Este caso, lo probaremos por doble contención.

$\geq$] Ya que $\kappa < \kappa^+$, tenemos $(\kappa)^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda$ y puesto que $\kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda$ obtenemos,

$$\kappa^\lambda \cdot \kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda$$

$\leq$] Como κ^+ es regular, tenemos que $cof(\kappa^+) = \kappa^+ > \lambda$. De esto tenemos que, si $f \in {}^\lambda(\kappa^+)$, entonces $f[\lambda]$ es acotado en κ^+, es decir hay un $\alpha \in \kappa^+$ tal, que $f : \lambda \to \alpha$ y de aquí que ${}^\lambda(\kappa^+) = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} {}^\lambda\alpha$. Por lo tanto, tenemos:

$$(\kappa^+)^\lambda = \left| {}^\lambda\left(\kappa^+ \right) \right| = \left| \bigcup_{\alpha<\kappa^+} {}^\lambda\alpha \right| \leq \sum_{\alpha<\kappa^+} |\, \alpha \,|^\lambda \underset{|\alpha| \leq \alpha < \kappa^+}{\leq} \sum_{\alpha<\kappa^+} \kappa^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$$

†

Veamos ahora un par de resultados que nos darán algo de información, están basados en el Teorema de Köning.

Proposición$_2$. $\lambda \geq \omega \;\&\; \kappa \geq 2 \to cof(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Prueba: Sea $\mu = cof(\kappa^\lambda)$. Así, κ^λ se puede expresar como la suma de μ cardinales, cada uno de cardinal menor a κ^λ; es decir,

$$\kappa^\lambda = \sum_{\xi<\mu} \kappa_\xi$$

con $\kappa_\xi < \kappa^\lambda$, para toda $\xi < \mu$. Usando el Teorema de Köning tenemos,

$$\kappa^\lambda = \sum_{\xi<\mu} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\mu} \kappa^\lambda = (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$$

Ahora bien, si tuvieramos que $\mu \leq \lambda$, tendríamos que

$$\kappa^\lambda < \kappa^{\lambda\cdot\mu} = \kappa^\lambda$$

lo cual es absurdo. Así, $cof(\kappa^\lambda) = \mu > \lambda$. †

Como caso particular tenemos que, $cof(2^{\aleph_0}) > \omega$ y por tanto, $2^{\aleph_0}$ **no** puede ser $\aleph_\omega$, **ni** $\aleph_{\omega+\omega}$, **ni**, $\aleph_{\varepsilon_o}$, **ni** ningún cardinal cuya cofinalidad sea ω.

De cierta manera se puede probar la conversa de esto. Usando técnicas de Forcing, se puede probar que para cada $\kappa > \omega$, con $cof(\kappa) \neq \omega$, se tiene que es consistente (relativamente) el suponer que $2^{\aleph_0} = \kappa$.

Un poco más explícito. Bajo la suposición de que es consistente **ZFC**, hay un modelo para cada $\kappa > \omega$, con $cof(\kappa) \neq \omega$, donde $2^{\aleph_0} = \kappa$.

Una lectura de la propiedad **8**, es que si el exponente sobrepasa o es igual a la base entonces el resultado de la exponenciación es, 2 elevado al exponente. Pero ¿qué ocurre en el caso en que el exponente sea menor que la base? Una respuesta parcial nos la dá la siguiente,

Proposición$_3$.

i) $\forall\kappa\left[\kappa \geq \omega \rightarrow \kappa^{cof(\kappa)} > \kappa\right]$.

ii) $\forall\kappa\forall\lambda\left[\kappa \geq \omega \ \& \ \lambda \geq cof(\kappa) \rightarrow \kappa^{\lambda} > \kappa\right]$.

Prueba de **i**). Sean $\kappa \geq \omega$ y $\lambda = cof(\kappa)$. Sabemos que, $\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ con $\kappa_\xi < \kappa$ para toda $\xi < \lambda$. Por el Teorema de Köning tenemos que,

$$\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\lambda} \kappa = \kappa^\lambda$$

La prueba de **ii**) es inmediata de **i**). †

Una prueba alternativa a este resultado se debe al mismo Köning, la cual por cierto **no** usa el teorema que lleva su nombre, de hecho prueba **ii**) y como caso particular se tiene **i**).

Sea pues $\kappa \geq \omega$ y $\lambda \geq cof(\kappa)$ veamos que $\kappa^\lambda > \kappa$. Puesto que $\kappa \leq \kappa^\lambda$, basta ver que no hay funciones suprayectivas de κ en ${}^\lambda\kappa$. Sean $g : \kappa \rightarrow {}^\lambda\kappa$ y f un testigo de la cofinalidad de λ en κ. Se define

$$h : \lambda \rightarrow \kappa$$
$$\forall\xi < \lambda, \quad h(\xi) = \bigcap\left[\kappa \setminus \left\{(g(\nu))(\xi) \ / \ \nu < f(\xi)\right\}\right]$$

Así, h no está en la imagen de g y de aqui que g no sea suprayectiva.

Tarea. Justique la prueba anterior.

Con este resultado podemos dar otra prueba de la **Proposición$_2$**. Puesto que,

$$(\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^\lambda$$

tenemos, forzosamente, que, $\lambda < cof(\kappa^\lambda)$.

Hasta ahora sabemos que κ^λ es mayor estrictamente que κ cuando $\lambda \geq cof(\kappa)$; y toma el valor de 2^λ, cuando $\lambda \geq \kappa$. Se puede decir algo más cuando $cof(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, veamos.

$$\kappa \underset{3.i)}{<} \kappa^{cof(\kappa)} \underset{cof(\kappa)\leq\lambda}{\leq} \kappa^\lambda \underset{\lambda\leq\kappa}{\leq} \kappa^\kappa \underset{\mathbf{8}}{=} 2^\kappa$$

Concretamos esto en:

Proposición$_4$. Sean $\kappa \geq \omega$ y $cof(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa.$ Así,

1. $\kappa < \kappa^\lambda \leq 2^\kappa.$
2. (**HGC**) $\kappa^\lambda = \kappa^+.$

Vamos ahora a preguntarnos ¿qué ocurre para κ^λ, cuando $\lambda < cof(\kappa)$?

Sabemos que $\kappa \leq \kappa^\lambda.$ Sea $\nu = cof(\kappa)$ y supongamos que $\lambda < \mu.$ De nuestra suposición obtenemos que, ${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha\in\kappa} {}^\lambda\alpha.$ Con esto,

$$\kappa^\lambda = \left| \bigcup_{\alpha\in\kappa} {}^\lambda\alpha \right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} \left| {}^\lambda\alpha \right| = \kappa \cdot \operatorname*{Sup}_{\alpha<\kappa} \left| \alpha \right|^\lambda$$

Ahora bien, ¿ Qué podemos decir de $\left| \alpha \right|^\lambda$, para $\alpha < \kappa$? Algo es,

$$\left| \alpha \right|^\lambda \leq \left(\left| \alpha \right| + \lambda \right)^{\left| \alpha \right| + \lambda} = 2^{\left| \alpha \right| + \lambda}$$

con $\left| \alpha \right| + \lambda < \kappa.$ Pero de $2^{\left| \alpha \right| + \lambda}$ ¿Qué se puede decir?

Puesto que los conjuntos $\left\{ 2^{\left| \alpha \right| + \lambda} \ / \ \alpha < \kappa \right\}$ y $\left\{ 2^\mu \ / \ \lambda \leq \mu < \kappa \right\}$ coinciden, sus supremos también pero, el supremo del segundo es el punto de convergencia de la sucesión $\left\langle 2^\mu \ / \ \mu < \kappa \right\rangle$. Con lo cual obtenemos,

$$\kappa^\lambda \leq \kappa \cdot \operatorname*{Sup}_{\alpha<\kappa} \left| \alpha \right|^\lambda \leq \kappa \cdot \operatorname*{Sup}_{\mu<\kappa} 2^\mu$$

Hasta aquí podemos acotar. Podemos dar una respuesta final, si suponemos **HGC**.

$$\kappa^\lambda \leq \kappa \cdot \operatorname*{Sup}_{\mu<\kappa} 2^\mu \underset{\textbf{HGC}}{=} \kappa \cdot \operatorname*{Sup}_{\mu<\kappa} \mu^+ \underset{\mu^+\leq\kappa}{=} \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

Resumiendo.

Proposición$_5$. Sean $\kappa \geq \omega$ y $0 < \lambda < cof(\kappa).$ Así,

1. $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq \kappa \cdot \operatorname*{Sup}_{\mu<\kappa} 2^\mu.$
2. (**HGC**) $\kappa^\lambda = \kappa.$

Podemos dar otra prueba de esta proposición. Primeramente, recordemos algunos hechos.

Tenemos que, $[\kappa]^\lambda = \left\{ a \subseteq \kappa \ / \ \left| a \right| = \lambda \right\}$ y que $\left| [\kappa]^\lambda \right| = \kappa^\lambda$. Ahora, sea

$$A_k = \left\{ a \subseteq \kappa \ / \ a \text{ es acotado en } \kappa \right\}$$

Obsérvese que si a es acotado en $\kappa,$ $a \in A_\kappa,$ se tiene que $\left| a \right| < \kappa,$ pero la conversa no es cierta (pues por ejemplo $|\aleph[\omega]| = \aleph_0 < \aleph_\omega$ y $\aleph[\omega]$ es no–acotado en $\aleph_\omega$). Ahora, si a es un subconjunto no–acotado de κ, entonces $|a|$ es cofinal en κ (¿Por qué?) y por tanto, $cof(\kappa) \leq |a|$, o equivalentemente, si $a \subseteq \kappa$ tal, que $|a| < cof(\kappa)$, entonces a es acotado en κ.

Supongamos ahora que $\lambda < cof(\kappa)$, por lo dicho arriba, $[\kappa]^\lambda \subseteq A_\kappa$, pero $A_\kappa \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \wp(\alpha)$. De todo esto, tenemos:

$$\kappa^\lambda = |[\kappa]^\lambda| \leq \left|\bigcup_{\alpha\in\kappa} \wp(\alpha)\right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} 2^{|\alpha|} \underset{\mathbf{HGC}}{=} \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^+ \leq \sum_{\alpha<\kappa} \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

†

Al suponer la **HGC**, la exponenciación cardinal queda perfectamente determinada:

Corolario$_6$. (**HGC**) Sean $\kappa, \lambda \in CAR$. Así,

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si} \quad \lambda < cof(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si} \quad cof(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \lambda^+ & \text{si} \quad \kappa \leq \lambda \end{cases}$$