# Exponenciación en base $2$

Veamos ahora algunos resultados conocidos para la exponenciación cardinal en base $2.$ La funcional exponenciación en base $2$ aplicada a cardinales tranfinitos es conocida bajo el nombre de *Funcional Continuum.* Que por cierto, ésta es una funcional monótona **no**–decreciente es decir, si $\omega \leq \kappa < \lambda,$ entonces $2^{\kappa} \leq 2^{\lambda}.$

Los siguientes resultados son para cuando el exponente es un cardinal límite.

Sean $\kappa$ un límite y $\eta = cof(\kappa).$ Sabemos que $\kappa = \sum_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha$ con $\eta \leq \kappa$ y $\kappa_\alpha < \kappa,$ para toda $\alpha < \eta.$ Con lo que, por lo pronto, tenemos

$$2^{\kappa} = 2^{\sum_{\alpha<\eta}\kappa_\alpha} = \prod_{\alpha<\eta} 2^{\kappa_\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Esta última parte, $\prod_{\alpha<\eta} 2^{\kappa_\alpha},$ nos remite a pensar en el conjunto de todas las potencias, en base $2,$ con exponentes menores a $\kappa$ y podríamos acotar el producto anterior usando el supremo de éstas. Un poco de notación.

**Definición₁**. Sea $\kappa$ un cardinal límite. Pondremos

$$2^{<\kappa} = Sup\left\{2^{\lambda} \ / \ \lambda < \kappa\right\}$$

**Observación₁**:

**i**) Para un cardinal límite $\kappa$, se tiene que, $\kappa \leq 2^{<\kappa} \leq 2^{\kappa}.$ Pues:
Pongamos por lo pronto, $2_{<\kappa} = \left\{2^{\lambda} \ / \ \lambda < \kappa\right\}.$
El hecho de que $2^{<\kappa} \leq 2^{\kappa},$ se debe a que $2^{\kappa}$ es cota superior de $2_{<\kappa}.$
Por otro lado; para cada $\mu \in \kappa,$ se tiene que $\mu < 2^{\mu} \in 2_{<\kappa}.$ Por tanto,

$$\kappa = Sup\,\kappa \leq Sup\, 2_{<\kappa} = 2^{<\kappa}$$

**ii**) No necesariamente $2^{<\kappa} = 2^{\kappa}.$
Pues, por ejemplo, tenemos

$$2^{<\aleph_0} = Sup\left\{2^{n} \ / \ n < \omega\right\} = \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$$

Otro ejemplo, bajo la **HGC**, es:

$$2^{<\aleph_\omega} = Sup\left\{2^{\aleph_n} \ / \ n < \omega\right\} = Sup\left\{\aleph_{n+1} \ / \ n < \omega\right\} = \aleph_\omega \neq 2^{\aleph_\omega}$$

Con esta notación, continuemos con nuestras ideas.

$$2^{\kappa} \underset{*}{=} \prod_{\alpha < \eta} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha < \eta} 2^{<\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{\eta} \leq (2^{\kappa})^{\eta} = 2^{\kappa \cdot \eta} \underset{\eta \leq \kappa}{=} 2^{\kappa}$$

Con esto, hemos obtenido un resultado que podemos enunciar de la siguiente manera.

**Proposición$_8$**. Si $\kappa$ es un cardinal límite, entonces

$$2^{\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{cof(\kappa)}$$

Regresando a nuestra ecuación $(*)$, bien podemos pensar en la posibilidad –la consistencia relativa lo permite– de que la exponenciación en base $2$, con exponentes menores a $\kappa$, se estacione. Se tiene el siguiente resultado para cardinales singulares, casos particulares de cardinales límites.

**Proposición$_9$**. Sea $\kappa \geq \omega$ y singular. Así,

$$\forall \mu \left[ \forall \lambda \left( \omega \leq \lambda < \kappa \rightarrow 2^{\lambda} = \mu \right) \rightarrow 2^{\kappa} = \mu \right]$$

**Prueba**: Puesto que $\kappa$ es singular, $\kappa = \sum_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha$ con $\eta = cof(\kappa) < \kappa$ y $\kappa_\alpha < \kappa$, para toda $\alpha < \eta$. Ahora, supongamos que $\mu$ es un cardinal con la propiedad de que $2^{\lambda} = \mu$ para $\omega \leq \lambda < \kappa$. Así,

$$2^{\kappa} \underset{(*)}{=} \prod_{\alpha<\eta} 2^{\kappa_\alpha} = \prod_{\alpha<\eta} \mu = \mu^{\eta} \underset{\circledast}{=} (2^{\eta})^{\eta} = 2^{\eta \cdot \eta} = 2^{\eta} \underset{\circledast}{=} \mu$$

$\circledast$ como $\eta < \kappa$, se tiene que $2^{\eta} = \mu$. †

Por ejemplo, si supieramos que

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \ldots = 2^{\aleph_n} = \ldots = \aleph_{\omega+28}$$

el resultado nos garantiza que, $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+28}$.

De hecho, la proposición anterior se puede reformular diciendo así, para $\kappa \geq \omega$ y singular, se tiene que si $\forall \lambda \left( \omega \leq \lambda < \kappa \rightarrow 2^{\lambda} = 2^{\aleph_0} \right)$, entonces $2^{\kappa} = 2^{\aleph_0}$.

Es de esperarse que este resultado también sea cierto si la funcional continuum se estaciona *a partir de un momento dado*. En vez de tratar de modificar la prueba anterior, daremos otra, basándonos en la primera proposición.

**Proposición$_{10}$**. Sea $\kappa \geq \omega$ y singular. Así,

$$\forall \lambda_0 \left[ \forall \lambda \left( \omega \leq \lambda_0 \leq \lambda < \kappa \rightarrow 2^{\lambda} = 2^{\lambda_0} \right) \rightarrow 2^{\kappa} = 2^{\lambda_0} \right]$$

**Prueba**: Tenemos que $\omega \leq cof(\kappa) < \kappa$. Basta considerar el caso en que

$cof(\kappa) \leq \lambda_0 < \kappa$ (pues en caso de que $\lambda_0 < cof(\kappa)$, por hipótesis, $2^{\lambda_0} = 2^{cof(\kappa)}$ y sería suficiente con tomar $\lambda_0 = cof(\kappa)$ ). Por hipótesis, $2^{<\kappa} = Sup\left\{2^{\lambda} \ / \ \lambda < \kappa\right\} = 2^{\lambda_0}$. De esto tenemos,

$$2^{\kappa} \underset{\mathbf{P_7}}{=} \left(2^{<\kappa}\right)^{cof(\kappa)} = (2^{\lambda_0})^{cof(\kappa)} = 2^{\lambda_0 \cdot cof(\kappa)} \underset{cof(\kappa) \leq \lambda_0}{=} 2^{\lambda_0} \qquad \dagger$$

Una pregunta natural es, ¿Qué ocurre si $2^{\lambda}$ **no** se estaciona? para $\lambda < \kappa$, con $\kappa \geq \omega$ y límite. Se puede decir muy poco. Sea

$$2^{<\kappa} = Sup\left\{2^{\lambda} \ / \ \lambda < \kappa\right\} = \mu$$

con $\mu \leq 2^{\kappa}$. Resulta que $\mu$ es el supremo de una $\kappa$–sucesión monótona no–decreciente y por tanto, $cof(\mu) = cof(\kappa)$ (¡Probarlo!). Así,

$$2^{\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{cof(\kappa)} = \mu^{cof(\mu)}$$

Tenemos una noción que es de relativa importancia en todo esto.

**Definición$_2$.** La funcional *Gimel,* $\gimel$, queda definida como sigue,

$$\gimel : CAR \rightarrow CAR$$
$$\forall \kappa \geq \omega \quad \gimel(\kappa) = \kappa^{cof(\kappa)}$$

En particuar si $\kappa$ es regular, $\gimel(\kappa) = \kappa^{cof(\kappa)} = \kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$, es decir la funcional Gimel coincide con la Continuum en los cardinales regulares.

# Cardinales Fuertes

**Definición**$_3$. Sea $\kappa \geq \omega$. Diremos que $\kappa$ es *(un Cardinal) Fuerte* syss

$$\forall \lambda < \kappa \left[ 2^{\lambda} < \kappa \right]$$

**Ejemplos**:

**1**. $\omega$ es un cardinal fuerte.

**2**. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+28}$, entonces $\aleph_\omega$ no es fuerte. Pero,

**3**. Bajo la suposición de la **HGC** tenemos que, $\aleph_\omega$ es un cardinal fuerte. De hecho, si $\alpha \in LIM$, entonces $\aleph_\alpha$ es fuerte.

**Observación**$_2$:

**i**) Si $\kappa$ es un cardinal fuerte, entonces es un cardinal límite.
Pues si $\kappa = \lambda^+$, entonces como $\lambda < \lambda^+$ se tiene que $\kappa = \lambda^+ \leq 2^{\lambda}$ y por tanto, $\kappa$ no es un cardinal fuerte.

**ii**) Si $\kappa$ es un cardinal límite, no necesariamente se tiene que sea un cardinal fuerte. Pues por ejemplo, $\aleph_\omega$ es un cardinal límite y $\aleph_0 < \aleph_\omega$ y podría ser que, $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$.

Veamos algunas propiedades de los cardinales fuertes.

**Proposición**$_{11}$. Los cardinales fuertes son cerrados bajo la operación de exponenciación cardinal.

$$\forall \lambda, \mu < \kappa \left[ \lambda^{\mu} < \kappa \right]$$

**Prueba**: Sea $\kappa$ un cardinal fuerte y sean $\lambda, \mu < \kappa$. Así,

$$\lambda^{\mu} \leq (\lambda + \mu)^{\lambda+\mu} = 2^{\lambda+\mu} < \kappa$$

teniendo en cuenta, por supuesto, que $\lambda + \mu = max\left\{\lambda, \mu\right\} < \kappa$. †

Hay muchos cardinales fuertes, distintos de $\omega$, de hecho tenemos,

**Proposición**$_{11}$. La clase de los cardinales fuertes es confinal con $CAR$.

$$\forall \lambda \, \exists \kappa \left[ \kappa > \lambda \;\&\; \kappa \text{ es fuerte} \right]$$

**Prueba**: Sea $\lambda \in CAR$ arbitrario. Definimos recursivamente $f_\lambda$ como sigue.

$$f_\lambda : \omega \to CAR$$

**i**) $f_\lambda(0) = \lambda$

**ii**) $\forall n \in \omega, f_\lambda(n^+) = 2^{f_\lambda(n)}$

Sea $\kappa = \bigcup f_\lambda[\omega]$. Así, $\kappa > \lambda$ y es fuerte. Además, entre $\lambda$ y $\kappa$ no hay ningún cardinal fuerte. (**TAREA**) †

Un par de propiedades que no podemos dejar de mencionar,

**Proposición$_{12}$**.

**i**). Si $\kappa$ es fuerte, entonces $2^{<\kappa} = \kappa$. Y por tanto, para un cardinal fuerte $\kappa$, se tiene que $2^{<\kappa} < 2^\kappa$.

**ii**). Si $2^{<\kappa} = \kappa$ y $\kappa$ es singular, entonces $\kappa$ es fuerte.

**Prueba**:
**i**). Sea $\kappa$ un cardinal fuerte. Tenemos que $\kappa$ es límite y por la **Observación**$_{1.i)}$, $\kappa \leq 2^{<\kappa}$. Por otro lado, de la definición de fuerte, $\kappa$ es cota superior de $\left\{2^\lambda \ / \ \lambda < \kappa\right\}$ y por tanto, $2^{<\kappa} \leq \kappa$.
**ii**). Supongamos que $\kappa$ es singular y $2^{<\kappa} = \kappa$. Como $\kappa \geq \omega$ y es singular, tenemos a la mano la **Prop**$_9$ por lo que, si la función continuum se estacionara por abajo de $\kappa$ a partir de un $\lambda_0$, con $\lambda_0 < \kappa$, tendríamos que $2^\kappa = 2^{\lambda_0} = 2^{<k}$ y por tanto $2^{<\kappa} \neq \kappa$. Concluimos pues que, la continuum no se puede estacionar por abajo de $\kappa$. Finalmente; para cualquier $\mu < \kappa$ hay un $\mu_0$ tal, que $\mu < \mu_0 < \kappa$ y $2^\mu < 2^{\mu_0}$ y por consiguiente,

$$2^\mu < 2^{\mu_0} \leq 2^{<\kappa} = \kappa$$ †

Una consecuencia inmediata es, las funcionales Continuum y Gimel coinciden en los cardinales fuertes.

**Corolario$_{13}$**. Si $\kappa$ es fuerte, entonces $2^\kappa = \gimel(\kappa)$.
**Prueba**: $2^\kappa = \left(2^{<\kappa}\right)^{Cof(\kappa)} = \kappa^{Cof(\kappa)} = \gimel(\kappa)$ †

Para dar más ejemplos de cardinales fuertes, generalizamos el procedimiento que usamos para encontrar el primero.

**Definición$_4$.** La funcional *Beth,* $\beth$, queda definida recursivamente sobre $OR$, como sigue:

$$\beth : OR \to CAR$$

i) $\beth_0 = \aleph_0$

ii) $\forall \alpha,\quad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$

iii) $\forall \beta \in LIM,\quad \beth_\beta = Sup\left\{\beth_\alpha \;/\; \alpha < \beta\right\}$

**Observación$_3$.**

1. Bajo la suposición de la **HGC**, $\beth = \aleph$. Es decir, $\forall \alpha,\ \beth_\alpha = \aleph_\alpha$.
2. Si $\alpha \in LIM$, entonces $\beth_\alpha$ es fuerte.
3. Para $\alpha \in OR$, se tiene que $\beth_{\alpha+\omega}$ es el primer cardinal fuerte mayor que $\beth_\alpha$
4. Si $\alpha \in LIM$, entonces $cof(\beth_\alpha) = cof(\alpha)$.
5. $\beth_\omega$, $\beth_{\omega_1}$, $\beth_{\omega_\omega}$, son cardinales fuertes y singulares.
6. La Funcional $\beth$, es monótona y continua, es decir es normal.
7. El primer punto fijo de beth, $\beth_\kappa = \kappa$, es un cardinal fuerte que tiene cofinalidad $\omega$ y por tanto es singular.
8. Todo cardinal fuerte es un *beth*. (**TAREA**)

Es claro que la *beth* nos proporciona muchos ejemplos de cardinales fuertes. Tenemos que $\omega$ es el primer cardinal fuerte y es regular, pero todos los demás que nos vienen a la mente son singulares. ¿Habrá cardinales incontables, fuertes y regulares? La respuesta es similar a la dada para los cardinales (débilmente) inaccesibles. Formalizemos.

**Definición$_5$.** (**Sierpinski**–**Tarski**)

$\kappa$ es un *Cardinal Fuertemente Inaccesible* syss

**i**) $\kappa > \omega$,

**ii**) $\kappa$ es un cardinal fuerte, y

**iii**) $\kappa$ es un cardinal regular.

Puesto que los cardinales fuertes son cardinales límites, entonces *todo fuertemente inaccesible es (débilmente) inaccesible.* Y si suponemos la **HGC**, tenemos que *todo (débilmente) inaccesible es fuertemente inaccesible.*

Los cardinales fuertemente inaccesibles tienen propiedades de cerradura muy fuertes y de ahí el nombre.

**Proposición**$_{14}$. Sea $\kappa$ un cardinal fuertemente inaccesible. Así:

**1**. Si $|a| < \kappa$, entonces $|\wp(a)| < \kappa$.

**2**. Si para toda $i \in I$, $|a_i| < \kappa$, con $|I| < \kappa$, entonces $\left|\bigcup_{i\in I} a_i\right| < \kappa$.

**3**. Si $|a| < \kappa$ y $f : a \to \kappa$, entonces $\bigcup f[a] < \kappa$.

**Prueba**: **TAREA**.

Terminamos esta sección con un comentario.

Bajo la suposición de la existencia de cardinales inaccesibles, es consistente que $2^{\aleph_0}$ sea débilmente inaccesible o que sea tan grande como el primer inaccesible débil.

†