Todo lo que siempre quiso saber sobre Lógica*

I. Sintaxis

1. El Lenguaje (Formal de primer orden) para la Teoría de Conjuntos, $\mathcal{L}_\in$ es aquella que tiene como único símbolo no lógico –es decir su tipo de semejanza consta de– una letra predicativa binaria, $\in$ (la pertenencia). Así, $\mathcal{L}_\in$ es un conjunto de símbolos de la forma,

$$
\begin{array}{rll}
\mathcal{L}_\in = & \{ \in \} & \text{(No-Lógicos, la pertenencia)} \\
\cup & \{ v_n \ / \ n \in \mathbb{N} \} & \text{(Variables)} \\
\cup & \{ = \} & \text{(Igualdad)} \\
\cup & \{ \neg, \ \& \} & \text{(Conectivos)} \\
\cup & \{ \forall, \exists \} & \text{(Cuantificadores)} \\
\cup & \{), (, \ , \} & \text{(Auxiliares o de Puntuación)}
\end{array}
$$

Los otros conectivos – $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ – quedan definidos en términos de los dados. Análogamente para el cuantificador existencial – $\exists$. Vea **I.6**.

2. $EXP_\in = \{ e \ / \ e$ es una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{L}_\in \}$

$= \{ e \ / \ e$ es una $\in$ –expresión$\}$

3. $TRM_\in = \{ v_n \ / \ n \in \mathbb{N} \} = VAR$.

(Términos indefinidos; los demás seran definidos uno a uno.)

4. $ATM_\in = \{ (x = y) \ / \ x, y \in VAR \} \cup \{ (x \in y) \ / \ x, y \in VAR \}$. (Atómicas)

5. $FRM_\in$ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que contiene a las atómicas y es cerrado bajo conectivos y cuantificadores. Es decir,

I) $ATM_\in \subseteq FRM_\in \subseteq EXP_\in$. Y

II). a). Si $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, entonces

$$(\neg\alpha) \in FRM_\rho \quad \text{y} \quad (\alpha \ \& \ \beta) \in FRM_\rho$$

b). Si $\alpha \in FRM_\rho$ y $x \in VAR$, entonces

$$(\exists x \ \alpha) \in FRM_\rho$$

III). Si $\mathcal{F}$ es tal, que $ATM_\in \subseteq \mathcal{F} \subseteq EXP_\in$ y cumple con **II**), entonces $FRM_\in \subseteq \mathcal{F}$.

$*$ **y nunca se atrevió a preguntar**.

6. Las siguientes $\in$–expresiones son abreviaturas de $\in$–fórmulas.

$$
\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) &\leftrightharpoons (\neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)) \\
(\alpha \rightarrow \beta) &\leftrightharpoons (\neg(\alpha \ \& \ \neg\beta)) \\
(\alpha \leftrightarrow \beta) &\leftrightharpoons ((\alpha \rightarrow \beta) \ \& \ (\beta \rightarrow \alpha)) \\
\big(\forall x\, \alpha\big) &\leftrightharpoons \big(\neg\big(\exists x\, \neg\alpha\big)\big)
\end{aligned}
$$

7. **Inducción y Recursión para fórmulas**.

- **Principio de Inducción sobre la formación de fórmulas**.

Sea $\wp$ una propiedad que “compete” a $\in$–expresiones.

Si

I) Todas las $\in$–atómicas tienen la propiedad $\wp$.

a) Si $x, y \in VAR$, entonces $\wp(x = y)$.

b) Si $x, y \in VAR$, entonces $\wp(x \in y)$.

Y

II) La propiedad $\wp$ se preserva bajo conectivos y el cuantificador.

a) Si $\alpha, \beta \in FRM_{\in}$ son tales que $\wp(\alpha)$ y $\wp(\beta)$, entonces

$$\wp(\neg\alpha) \quad \text{y} \quad \wp(\alpha \ \& \ \beta)$$

b) Si $\alpha \in FRM_{\rho}$ que cumple con $\wp(\alpha)$ *y* $n \in \mathbb{N}$, entonces $\wp(\forall v_n \alpha)$,

entonces toda $\in$–fórmula tiene la propiedad $\wp$.

- **Principio de Recursión para fórmulas**.

Para definir $\mathcal{D}$, una función o una relación, para todas las ρ–fórmulas hay que,

I) Definir $\mathcal{D}$, para las $\in$–atómicas. Y

II) Bajo la suposición de que está definido $\mathcal{D}$ para algunas fórmulas, definir $\mathcal{D}$ para las generadas por los conectivos y el cuantificador.

8. Ocurrencias de una variable, *Libres* y *Acotadas*.

a). $\mathcal{L}_{\in}^{n} = \Big\{\alpha \in FRM_{\in} \ / \ \alpha$ tiene exactamente n variables líbres$\Big\}$.

b). $\mathcal{L}_{\in}^{0} = \Big\{\sigma \in FRM_{\in} \ / \ \sigma$ es un ρ–enunciado$\Big\}$.

II. Semántica

1. Una estructura $\mathfrak{A}$ es una *Interpretación* del lenguaje de la Teoría de Conjuntos, $\mathcal{L}_{\in}$, lo cual denotaremos por $\mathfrak{A} \in V_{\in}$, syss hay dos conjuntos a y r tales, que

i). $\mathfrak{A} = \langle a, r \rangle$,

ii). $a \neq \emptyset$. (a es el universo de interpretación, donde "variarán" las variables) Y

iii). $r \subseteq a \times a$. (r es la interpretación de la pertenencia, $\in^{\mathfrak{A}} = r$).

2. Definición de *Satisfacibilidad* (Tarski–1936).

Sean $\mathfrak{A} \in V_{\rho}$, $\alpha \in FRM_{\rho}$ y $s \in {}^{\omega}A = \left\{ s \ / \ s : \mathbb{N} \to A \right\}$.

a). La interpretación $\mathfrak{A}$ *Satiface* α en s.

$$\mathfrak{A} \models \alpha \, [s]$$

b). La fórmula α es *Verdadera* en $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{A}$ es *Modelo* de α.

$$\mathfrak{A} \models \alpha$$

c). La fórmula α es *Universalmente Verdadera*.

$$\models \alpha$$

3. Sean $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho}$ y $\mathfrak{A} \in V_{\in}$.

a). El enunciado σ es verdadero o falso en $\mathfrak{A}$ (ley del tercero excluido).

b). El enunciado σ no puede ser verdadero y falso en $\mathfrak{A}$ (ley de no contradicción).

c). $\mathfrak{A} \models \sigma$ syss $(\neg\sigma)$ es falso en $\mathfrak{A}$ y α es falsa en $\mathfrak{A}$ syss $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$.

4. Sean $\mathfrak{A} \in V_{\rho}$ y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho}$ (se podría pensar que Σ es un conjunto de axiomas).

$$\mathfrak{A} \models \Sigma \text{ syss } \mathfrak{A} \models \sigma \text{ para todo } \sigma \in \Sigma$$

Léase $\mathfrak{A} \models \Sigma$, como $\mathfrak{A}$ es un Modelo de Σ.

5. Dado un conjunto de enunciados Σ (pensar en axiomas) nos interesan los enunciados que son verdaderos en todos los modelos de Σ (dicho de otra manera (último tercio del s. XIX) de sus *"Teoremas"*) es decir, de sus consecuencias lógicas. Formalmente,

Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho}$. Así,

$$\Sigma \models \sigma \text{ syss para cada } \mathfrak{A} \in V_{\in}, \text{ si } \mathfrak{A} \models \Sigma, \text{ entonces } \mathfrak{A} \models \sigma.$$

Léase $\Sigma \models \sigma$, como σ es *Consecuencia Lógica* de Σ.

III. Cálculo de Predicados.
Correctud, Completud, Consistencia.

En lo que sigue, $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathscr{L}^0_{\in}$.

1. Un *Cálculo de Predicados*.

Se elige un conjunto de fórmulas, llamados *Axiomas Lógicos*, junto con algunas *Reglas de Inferencia*, de tal suerte que cumplan con las propiedades dadas en **2** y **3**.

Junto con esto se da la noción de *Deducción* de una fórmula α, a partir de un conjunto Σ de fórmulas, llamadas *Hipótesis* o *Axiomas Propios.*

–Una fórmula α se *Deduce* de Σ syss hay una sucesión **finita** de fórmulas α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que la última, α_n, es α y cada una de ellas es o un axioma lógico, o una hipótesis de Σ, o se obtiene de fórmulas anteriores aplicando una de las regla de inferencia–

Esto se denota por

$$\Sigma \vdash \alpha$$

y se dice que, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es una *Prueba* de α en Σ. También se dice que α es un *Teorema* en la *Teoría* Σ.

2. El **cálculo** debe ser *Correcto (Metateorema de Correctud)*.

$$\text{Si} \vdash \sigma, \text{ entonces} \models \sigma$$

–Lo que obliga a que los axiomas lógicos sean verdades universales y a que las reglas de inferencia trasmitan (por lo menos) la verdad de las fórmulas–

Es una consecuencia inmediata *Correctud Extendida.*

$$\text{Si } \Sigma \vdash \sigma, \text{ entonces } \Sigma \models \sigma$$

equivalentemente,

$$\text{Si } \mathfrak{A} \models \Sigma \text{ y } \Sigma \vdash \sigma, \text{ entonces } \mathfrak{A} \models \sigma$$

(En cualquier modelo de unos axiomas, son verdaderos todos los teoremas.)

3. El **cálculo** debe ser *Completo*.

Completo respecto a las Universalmente Válidas. –*Completud Semántica*–

$$\text{Si} \models \sigma, \text{ entonces} \vdash \sigma.$$

De hecho se debe tener algo más fuerte, *Completez Extendida.*

$$\text{Si } \Sigma \models \sigma, \text{ entonces } \Sigma \vdash \sigma.$$

(Metateorema de Completez. Gödel, 1929; tesis doctoral, se basa en **7***).*

$$\therefore \quad \vdash \quad \rightleftharpoons \quad \models$$

4. *Consistencia* de un conjunto, Σ, de enunciados. Se define así,

$CON(\Sigma)$ syss **no** hay un $\sigma \in \mathcal{L}_{\in}^{0}$ tal, que $\Sigma \vdash \sigma$ y $\Sigma \vdash \neg\sigma$

5. Se prueba que,

a). $CON(\Sigma)$ syss **hay** un $\sigma \in \mathcal{L}_{\in}^{0}$, tal que $\Sigma \nvdash \sigma$.

b). $\Sigma \nvdash \sigma$ syss $CON(\Sigma \cup \{\neg\sigma\})$

6. *Metateorema de Adecuidad.*

Si hay un $\mathfrak{A} \in V_{\rho}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, entonces $CON(\Sigma)$

7. Se prueba (Gödel en 1929, mejorada por Henkin en 1949 y simplifcada esta última por Hasenjaeger en 1953) que

Si $CON(\Sigma)$, entonces hay un $\mathfrak{A} \in V_{\rho}$ tal, que $\mathfrak{A} \models \Sigma$

NOTAS:

1. La prueba de **7** para lenguajes arbitrarios necesita usar el *Axioma de Elección* (**AE**). Sin embargo, para ciertos lenguajes, por ejemplo los numerables (como es nuestro caso, $\left| \mathcal{L}_{\in} \right| = \aleph_0$) o los lenguajes bien ordenables, se puede prescindir del **AE**.

2. Como la prueba de la completez del cálculo usa **7**, los comentarios anteriores le son aplicables.

8. *Completud Sintáctica.*

Un conjunto de enunciados Σ, es *Completo* syss

para todo $\sigma \in \mathcal{L}_{\in}^{0}$, $\Sigma \vdash \sigma$ o $\Sigma \vdash \neg\sigma$

9. Con **3** tenemos,

Σ es completo syss para todo $\sigma \in \mathcal{L}_{\in}^{0}$, $\Sigma \models \sigma$ o $\Sigma \models \neg\sigma$.

Quisieramos, dada una teoría Σ, se tuviera

¡…Σ consistente y completa…!

pero …

IV. Teoremas de Incompletud de Gödel

Aquí se parte de un lenguaje que contenga un contenido aritmético básico, es decir, un lenguaje formal de primer orden numerable, cuyos símbolos no lógicos tengan (indefinidos o definidos) a $+$, $\cdot$, s , 0 .

Diremos que un conjunto de fórmulas es *decidible* syss es computable. Es decir, si hay un algoritmo que permita determinar de manera mecánica si una fórmula cualquiera pertenece o no al conjunto en cuestión.

En lo que sigue supongamos que Σ es un conjunto de enunciados **decidible** y escrito en un lenguaje que contenga un contenido aritmético básico.

• Primer Teorema de Incompletud (**Gödel–Rosser**).

Sea Σ un conjunto de axiomas que contenga (o se deduzcan) las verdades aritméticas más simples pero que sea razonablemente potente (un ejemplo sería que contenga la aritmética de Peano). Así,

Si $CON(\Sigma)$, entonces Σ es Incompleto.

Nota:

Gödel prueba algo más débil: Bajo las suposiciones dadas,
Hay un enunciado σ_G (enunciado de Gödel) tal que:

a). Si $CON(\Sigma)$, entonces $\Sigma \nvdash \sigma_G$. Y

b). Si Σ es ω–consistente, entonces $\Sigma \nvdash \neg\sigma_G$.

La noción de ω–consistencia es estrictamente más fuerte que consistencia simple. En resumen, lo que prueba Gödel es, si Σ es ω–consistente, entonces Σ es incompleto. Sin embargo, Barkley Rosser en 1936, modificando la prueba dada por Gödel, encuentra un enunciado σ_R (enunciado de Rosser) tal que bajo la suposición de la consistencia simple, éste, σ_R, es indecidible para Σ, es decir ni él ni su negación se pueden deducir y por tanto, será incompleta.

• Segundo Teorema de Incompletud (G**ödel**).

Sea Σ un conjunto de axiomas que contenga (o se deduzcan) las verdades aritméticas más simples pero que sea razonablemente potente. Así,

Si $CON(\Sigma)$, entonces $\Sigma \nvdash con(\Sigma)$.

donde $con(\Sigma)$ es un enunciado tal que expresa en el lenguaje formal la consistencia de Σ.

Lo que nos dice este resultado es, "La consistencia de una teoría, lo suficientemente potente, no puede demostrarse con medios formalizables en la misma teoría".

Gödel no demostró propiamente este teorema, sólo argumentó en favor de su plausibilidad. La primera prueba completa, muy laboriosa, fué dada en 1939 por Hilbert y Bernays (en el segundo volumen del *Grundlagen der Mathematik).*

Unos últimos comentarios:

1. Los teoremas de Incompletud se aplican a la Teoría de Conjuntos de primer orden (Zermelo–Fraenkel, **ZF**).

2. Las pruebas de consistencia de teorías de primer orden, lo suficientemente potentes, se remiten a pruebas relativas de consistencia. Si T_1 y T_2 son teorías, lo más que podemos alcanzar es:

$$CON(T_1) \Rightarrow CON(T_2)$$

Esta consistencia relativa se aplica a algunos fragmentos de **ZF**.

3. Gödel en 1939 demostró que el Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo son consistentes con **ZF**. Es decir, si extendemos a **ZF** con dichos principios, como nuevos axiomas, el resultado es una teoría consistente, si **ZF** lo es. En símbolos:

$$CON(\mathbf{ZF}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF} + \mathbf{AE} + \mathbf{HC})$$

Para terminar este comentario, en 1963 Paul Cohen mostró la parte faltante para la independencia.

$$CON(\mathbf{ZF}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{AE})$$

y

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{HGC})$$

4. Son objetivos de este curso, dar las pruebas relativas de consistencia siguientes,

$$CON(\mathbf{ZF}^-) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF}^- + \mathbf{ABF})$$

y

$$CON(\mathbf{ZFC}^-) \Rightarrow CON(\mathbf{ZFC}^- + \neg\mathbf{ABF})$$