Primeras Relativizaciones

Trabajaremos en el lenguaje de la teoría de conjuntos, $\mathcal{L}_\in$.

Establecemos el escenario donde vamos a trabajar.

1. Sea $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_\in^0$.
Por lo general, trabajaremos dentro de Σ, donde Σ variará así,

$$\mathbf{Z}^- - \mathbf{ZF}_7 \subseteq \Sigma \subseteq \mathbf{ZF}^-$$

En el caso en que usemos más o menos axiomas, lo haremos explícito.

2. Sean M una clase y E una relacional sobre M, es decir, $E \subseteq M \times M$.
M, E será una "Interpretación clase" de $\mathcal{L}_\in$. Las variables variarán sobre los elementos de M y la Interpretación de la pertenencia, $\in$, será E.

a. Siempre debemos tener que

$$\Sigma \vdash \exists x\,(x \in M)$$

b. La relacional E **no** necesariamente es izquierda limitada, sobre M.
E es *Izquierda Limitada, sobre* M syss $\forall x \in M,\ x_p \in V$.

3. Si $\Sigma \vdash \varphi$, símplemente diremos que, "*en* o *desde* o *según* Σ, se tiene φ".
Así, por ejemplo, desde Σ se tiene, σ es verdadero o que M, E es modelo de σ, estamos entendiendo que $\Sigma \vdash \sigma^{M,E}$.

4. Si $p \in M$, definimos, $p_E = \left\{ q \in M \ / \ qEp \right\}$.

a. Para $p, q \in M$, tenemos que $(q \in p)^{M,E}$ syss qEp syss $q \in p_E$.

b. Podría ser el caso que para algún $p \in M$ se tuviera, pEp.
Aquí **no** estamos hablando de segmentos iniciales **propios**.

c. Si fuera el caso en que $E = \ \in_M$, tendriamos que $p_E = p_\in = p \cap M$.

Queriendo dar una visualización de lo que ocurre con las relativizaciones, viene a la mente la idea de gráficas.

Convención:

- Si qEp, dibujaremos a q y p como nodos o vértices, lo representaremos gráficamente por, $q \leftarrow p$ y diremos que q *"es hijo de"* p.
- Tenemos que, $p_E = \left\{ q \in M \ / \ q \leftarrow p \right\}$ es la clase (posiblemente propia) de todos los hijos de p.

Hay un tipo de interpretaciones del lenguaje de la teoría de conjuntos que nos van a interesar mucho y son las siguientes,

Definición$_1$. Diremos que M, E es un *Modelo Estandar, en* Σ, si se cumple con,

1. $\Sigma \vdash \exists x\ (x \in M)$. (En Σ, la clase M es no-vacía.)

2. $\Sigma \vdash M$ una clase transitiva, y

3. $E = \left\{ \left\langle x, y \right\rangle \in M \times M \ / \ x \in y \right\} = \ \in_M$.

(La interpretación de la pertenencia, en M, es la misma pertenencia.)

Si φ es una $\in$–fórmula, su relativización al modelo estandar $M, \ \in_M$ se acostumbra a denotarlo símplemente por, φ^M.

Observemos que para modelos estandar M, se tiene que $p_\in = p \cap M = p$, para cualquier $p \in M$.

Lo que haremos en esta parte es, ver qué condiciones habrá que exigir a Σ y a M, E para tener que M, E es modelo de algunos axioma particulares de **ZF**, según Σ. Es decir, dado un $\sigma \in$ **ZF** ¿para qué tipo de clases Σ, M y E? se tiene que,

$$\Sigma \vdash \sigma^{M,E}$$

Pasemos ahora a ver algunos axiomas.

- **ZF$_1$**: **Axioma de Extensionalidad**.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ZF_1})^{M,E} \ &\leftrightarrows \ \left(\forall x \forall y \left[\forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y) \ \rightarrow \ x = y \right] \right)^{M,E} \\
&= \ \forall x \in M \forall y \in M \left[\forall w \in M \left(w\, E\, x \leftrightarrow w\, E\, y \right) \ \rightarrow \ x = y \right] \\
&\leftrightarrow \ \forall x \in M \forall y \in M \left[\forall w \in M (w \in x_E \leftrightarrow w \in y_E) \ \rightarrow \ x = y \right] \\
&\leftrightarrow \ \forall x \in M \forall y \in M \left[x_E = y_E \ \rightarrow \ x = y \right]
\end{aligned}$$

"No hay dos nodos con los mismos hijos"

Por tanto, se tiene que

$(\mathbf{ZF_1})^{M,E}$ syss E es extensional, sobre A

Se tiene pues, que

M, E es modelo de **ZF$_1$** si y solo si desde Σ, E es extensional, sobre A

Todo modelo estandar, según Σ, es modelo de **ZF$_1$**, es decir, para M un modelo estandar tenemos,

$$\Sigma \vdash (\mathbf{ZF_1})^M$$

Esto se debe a que $\mathbf{ZF_1} \in \Sigma$.

- **$\mathbf{ZF}_2$: Axioma de Existencia**

$$(\mathbf{ZF_2})^{M,E} \;\leftrightharpoons\; \left(\exists x \forall y\, (y \notin x)\right)^{M,E}$$
$$\leftrightarrow\; \exists x \in M\, \forall y \in M (y \notin x_E)$$

"Hay un nodo que no tiene hijos"

Como $\mathbf{ZF_1}$, $\mathbf{ZF_2} \in \Sigma$,

$$(\mathbf{ZF_2})^{M,E} \leftrightarrow \exists x \in M\left[x_E = \emptyset\right]$$

Por tanto, se tiene que

M, E es modelo de $\mathbf{ZF_2}$ si y solo si desde Σ, hay un $p \in M$ tal, que $p_E = \emptyset$

Para M un modelo transitivo, según Σ , tenemos que

M es modelo de $\mathbf{ZF_2}$ si y solo si desde Σ, $\emptyset \in M$

- **$\mathbf{ZF}_3$: Axioma del Par**.

$$(\mathbf{ZF}_3)^{M,E} \;\leftrightharpoons\; \left(\forall x \forall y \exists z \forall w\left[w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y)\right]\right)^{M,E}$$
$$\leftrightarrow\; \forall x \in M \forall y \in M \exists z \in M \forall w \in M\left[w \in z_E \leftrightarrow (w = x \vee w = y)\right]$$
$$\leftrightarrow\; \forall x \in M \forall y \in M \exists z \in M\left[z_E = \left\{w \in M \;/\; w = x \vee w = y\right\}\right]$$

"Dados dos nodos, hay otro cuyos hijos son los dados"

Como $\mathbf{ZF_1}$, $\mathbf{ZF_3} \in \Sigma$,

$$(\mathbf{ZF}_3)^{M,E} \leftrightarrow \forall x \in M \forall y \in M \exists z \in M\left[z_E = \{x,y\}\right]$$

Así, se tiene que

M, E es modelo de $\mathbf{ZF_3}$ si y solo si desde Σ, $\forall p, q \in M\, \exists r \in M\left[r_E = \{p,q\}\right]$

Para M un modelo transitivo, según Σ, tenemos,

M es modelo de $\mathbf{ZF_3}$ si y solo si desde Σ, $\forall x, y \in M \exists z \in M\left[z = \{x,y\}\right]$

- **$\mathbf{ZF}_4$: Axioma de la Unión**

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{ZF}_4)^{M,E} &= \Big(\forall x \exists z \forall w \Big[w \in z \leftrightarrow \exists y (y \in x \ \& \ w \in y) \Big]\Big)^{M,E} \\
&\leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M \forall w \in M \Big[w \in z_E \leftrightarrow \exists y (y \in x_E \ \& \ w \in y_E) \Big] \\
&\leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M \Big[z_E = \Big\{ w \in M \ / \ \exists y (y \in x_E \ \& \ w \in y_E) \Big\} \Big]
\end{aligned}
$$

"Para cada nodo, hay otro cuyos hijos son los nietos del dado"

Como $\mathbf{ZF_1}$, $\mathbf{ZF_4} \in \Sigma$, para un modelo estandar M, según Σ, tenemos que

M es modelo de $\mathbf{ZF_4}$ si y solo si desde Σ, $\forall x \in M \exists z \in M \Big[z = \bigcup x \cap M \Big]$

- **$\mathbf{ZF}_5$: Axioma de Potencia**.

Sean $x,y \in M$ observemos los siguiente:

$$
\begin{aligned}
(x \subseteq y)^{M,E} &\leftrightharpoons (\forall z \Big[z \in x \rightarrow z \in y \Big])^{M,E} \\
&\leftrightarrow \forall z \in M \Big[z \in x_E \rightarrow z \in y_E \Big] \\
&\leftrightarrow x_E \subseteq y_E
\end{aligned}
$$

"Dos nodos están en la relación $\subseteq^{M,\in}$ syss
todos los hijos del primero son hijos del segundo"

Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{ZF}_5)^{M,E} &\leftrightharpoons \Big(\forall x \exists z \forall w \Big[w \in z \leftrightarrow w \subseteq x \Big]\Big)^{M,E} \\
&\leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M \forall w \in M \Big[w \in z_E \leftrightarrow w_E \subseteq x_E \Big] \\
&\leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M \Big[z_E = \Big\{ w \in M \ / \ w_E \subseteq x_E \Big\} \Big]
\end{aligned}
$$

"Para cada nodo hay otro cuyos hijos son aquellos cuyos hijos son
algunos de los hijos del dado"

Como $\mathbf{ZF_1}$, $\mathbf{ZF_5} \in \Sigma$, para un modelo estandar M, según Σ, tenemos que

M es modelo de $\mathbf{ZF_5}$ si y solo si desde Σ, $\forall x \in M \exists z \in M \Big[z = \wp(x) \cap M \Big]$

- **$\mathbf{ZF_6}$: Axioma de Comprensión**.

  Sea φ una $\in$–fórmula.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{ZF}_6)^{M,E} &\leftrightharpoons \Big(\forall x\exists z\forall w\Big[w \in z \leftrightarrow \Big(w \in x \ \& \ \varphi(w)\Big)\Big]\Big)^{M,E} \\
&\leftrightarrow \forall x \in M\exists z \in M\forall w \in M\Big[w \in z_E \leftrightarrow \Big(w \in x_E \ \& \ \varphi^{M,E}(w)\Big)\Big] \\
&\leftrightarrow \forall x \in M\exists z \in M\Big[z_E = \Big\{w \in M \ / \ w \in x_E \ \& \ \varphi^{M,E}(w)\Big\}\Big]
\end{aligned}
$$

“Para cada nodo, hay otro cuyos hijos son,
los hijos del dado que tienen la propiedad $\varphi^{M,E}$”

Para un modelo estandar M, según Σ, tenemos que

M es modelo de $\mathbf{ZF_6}$ si y solo si desde Σ,

$$\forall x \in M\exists z \in M\Big[z = \Big\{w \in M \ / \ w \in x \ \& \ \varphi^{M,E}(w)\Big\}\Big]$$