Extensiones Conservadoras

En lo que sigue, sean ρ y ρ' dos tipos de semejanza.

Recordar: Sean $\rho \subseteq \rho'$ y $T \cup \Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$.

- $\Gamma^{\vdash_\rho} = \left\{\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \ / \ T \vdash_\rho \sigma\right\}$
- T es una ρ–teoría syss $T = T^{\vdash_\rho}$.
- $EXP_\rho \subseteq EXP_{\rho'}$, $TRM_\rho \subseteq TRM_{\rho'}$, $ATM_\rho \subseteq ATM_{\rho'}$, $FRM_\rho \subseteq FRM_{\rho'}$ y $\mathcal{L}^0_\rho \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$.

Definición₁. Sean T una ρ–teoría y $\rho' \supseteq \rho$. La *Expansión* de T *a* ρ', en breve ρ'–*Expansión,* es

$$T' = \left\{\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho'} \ / \ T \vdash_{\rho'} \sigma\right\}$$

Observaciones₁. Sea T' la ρ'–expansión de T.

1. T' es la cerradura de T, bajo $\vdash_{\rho'}$, en símbolos: $T' = T^{\vdash_{\rho'}}$.
Así, T' es una ρ'–teoría.

2. Para cualquier $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho'}$, se tiene que $\left[T \vdash_\rho \sigma \Rightarrow T' \vdash_{\rho'} \sigma\right]$.

3. Si $\rho' \supsetneq \rho$, entonces $T' \supsetneq T$.

Definición₂. Sean T una ρ–teoría y T' una ρ'–teoría. Diremos que T' es una *Extensión (Simple) de* T *a* ρ', en corto ρ'–*Extensión* syss $\rho' \supseteq \rho$ y $T' \supseteq T$.

Observaciones₂:

1. Por $T' \supseteq T$, estamos entendiendo que, $T \subseteq T' \cap \mathcal{L}^0_\rho$,
o equivalentemente:

$$\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho\left[T \vdash_\rho \sigma \Rightarrow T' \vdash_{\rho'} \sigma\right]$$

2. La expansión de una teoría es una extensión de ésta.

Definición₃. Sean T una ρ–teoría y T' una ρ'–teoría. Diremos que T' es una *Extensión Conservadora (o Conservativa)* de T syss

i). T' es una extensión de T y

ii). $\neg\ \dot{\exists}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho\left[T' \vdash_{\rho'} \sigma \text{ y } T \nvdash_\rho \sigma\right]$ o $\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho\left[T' \vdash_{\rho'} \sigma \Rightarrow T \vdash_\rho \sigma\right]$.

Observación₃. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.

1. T' es una extensión conservadora de T.

2. $\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}_{\rho}^{0}\Big[T' \vdash_{\rho'} \sigma \iff T \vdash_{\rho} \sigma\Big]$.

3. $T' \cap \mathcal{L}_{\rho}^{0} = T$.

Proposición. La expansión de una teoría, es una extensión conservadora. †

Lo que vamos a hacer ahora es, partir de una ρ–teoría T y la vamos a extender –de forma conservativa– a una una ρ'–teoría T' $(\rho \subseteq \rho')$, añadiendo al lenguaje constantes o funcionales o predicados.

Por lo pronto, diremos que la ρ–teoría T y la ρ'–teoría T' tienen la propiedad $\wp^*$ si cumplen con,

1. T' es una extensión conservadora de T. Y

2. Para toda ρ'–fórmula β, hay otra ρ–fórmula β^*, con las mismas variables líbres de β, tal que

a. $T' \vdash_{\rho'} \beta^* \leftrightarrow \beta$.

b. $T' \vdash_{\rho'} \beta$ syss $T \vdash_{\rho} \beta^*$.

(I) Extensiones por definición de Constantes.

Sea $\alpha \in FRM_{\rho}$ cuya única variable líbre es y y supongamos además que se tiene,

$$T \vdash_{\rho} \exists! y\ \alpha(y)$$

Ahora, sean c una constante individual nueva $(c \notin \rho)$, $\rho' = \rho \cup \{c\}$ y T' la ρ'–teoría que se obtiene al cerrar bajo deducción (en $\mathcal{L}_{\rho'}$), el conjunto

$$T \cup \Big\{\forall y\Big(y \approx c \leftrightarrow \alpha\Big)\Big\}$$

Así, T y T' cumplen con la propiedad $\wp^*$. †

(II) Extensiones por definición de Funcionales.

Sea $\alpha \in FRM_{\rho}$ cuyas variables líbres son, $x_1, \ldots, x_n, y$ (todas distintas). Supongamos que se tiene,

$$T \vdash_{\rho} \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \exists! y\ \alpha(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Y sea f un símbolo funcional nuevo $(f \notin \rho)$ de aridad n. Sean $\rho' = \rho \cup \{f\}$ y T' la ρ'–teoría que se obtiene al cerrar bajo deducción (en $\mathcal{L}_{\rho'}$) el conjunto

$$T \cup \left\{ \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \Big(f(x_1, \ldots, x_n) \approx y \leftrightarrow \alpha \Big) \right\}$$

Así, T y T' cumplen con la propiedad $\wp^*$. †

(III) Extensiones por definición de Predicados.

Sean T una ρ–teoría y $\alpha \in FRM_\rho$ cuyas variables líbres son $x_1, \ldots, x_n$ (todas distintas). Sea P un símbolo de predicado nuevo $(P \notin \rho)$ de aridad n y sea $\rho' = \rho \cup \{P\}$. Sea T' la ρ'–teoría que se obtiene al cerrar bajo deducción (en $\mathcal{L}_{\rho'}$) el conjunto

$$T \cup \left\{ \forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \alpha \Big) \right\}$$

Así, T y T' cumplen con la propiedad $\wp^*$. †

NOTA.

1. Al enunciado agregado se le llama, *Axioma Definitorio (de P, de F o de c,* respectivamente).

2. Al cumplirse la propiedad **1** de $\wp^*$, se dice que la definición es *No–Creativa;* y al cumplir la propiedad **2.b**, se dice que la definición es *Eliminable.*