Ejemplos de Extensiones Conservadoras

Recordemos que $\Sigma \subseteq$ **ZF y que** M es una clase con $E \subseteq M \times M$.

- **ZF$_2$: Axioma de Existencia**

Como **ZF$_1$**, **ZF$_2$** $\in \Sigma$,

$$(\mathbf{ZF}_2)^{M,E} \leftrightarrow \exists x \in M\Big[x_E = \emptyset\Big]$$

Si $\Sigma \vdash \exists! x \in M\Big[x_E = \emptyset\Big]$ (esto se lograría si M,E fuera modelo tanto de **ZF$_1$** como de **ZF$_2$**) tenemos derecho a introducir la siguiente,

Notación: Por $\emptyset^{M,E}$ entenderemos que es el único nodo de M tal, que $(\emptyset^{M,E})_M = \emptyset$.

Para un modelo estandar M se tiene, $\emptyset^{M,\in} = \emptyset$.

- **ZF$_3$: Axioma del Par**.

Como **ZF$_1$**, **ZF$_3$** $\in \Sigma$,

$$(\mathbf{ZF}_3)^{M,E} \leftrightarrow \forall x,y \in M \exists z \in M\Big[z_E = \{x,y\}\Big]$$

Si $\Sigma \vdash \forall x,y \in M\, \exists! z \in M\Big[z_E = \{x,y\}\Big]$, tenemos derecho a introducir la siguiente,

Notación: Para $a,b \in M$ pondremos $\{a,b\}^{M,E}$ para denotar al único nodo de M que se tiene que $(\{a,b\}^{M,E})_E = \{a,b\}$.

De hecho tenemos,

$$\{\_,\_\}^{M,E} : M \times M \to M$$
$$\forall a,b \in M, \quad \{a,b\}^{M,E} = c$$

donde c es el único nodo de M tal, que $c_E = \{a,b\}$.

En particular(¡!),

$$\{\_\}^{M,E} : M \to M$$
$$\forall a \in M, \quad \{a\}^{M,E} = c$$

donde c es el único nodo de M tal, que $c_E = \{a\}$.

También tenemos,

$$\langle\_,\_\rangle^{M,E} : M \times M \to M$$
$$\forall a,b \in M, \quad \langle a,b\rangle^{M,E} = \{\{a,b\}^{M,E}, \{a\}^{M,E}\}^{M,E}$$

Para un modelo estandar M se tiene, si $a,b \in M$, entonces $\{a,b\}^{M,\in} = \{a,b\}$ y $\{a\}^{M,\in} = \{a\}$ y $\langle a,b\rangle^{M,\in} = \langle a,b\rangle$.

- **$\mathbf{ZF}_4$: Axioma de la Unión**

$$(\mathbf{ZF}_4)^{M,E} \leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M\Big[z_E = \Big\{ w \in M \;/\; \exists y (y \in x_E \;\&\; w \in y_E) \Big\} \Big]$$

En este ejemplo, si $\mathbf{ZF}_1$, $\mathbf{ZF}_4 \in \Sigma$, tenemos el derecho de introducir a la funcional $\bigcup$ en el lenguaje. Además, si M, E fuera modelo de estos axiomas o del axioma definitorio –todo desde Σ– también podríamos introducir el símbolo correspondiente y trabajaría de la siguiente manera,

$$\bigcup\nolimits^{M,E} : M \to M$$
$$\forall a \in M, \quad \bigcup\nolimits^{M,E} a = c$$

donde c es el único nodo de M tal que $c_E = \Big\{ w \in M \;/\; \exists b (b \in a_E \;\&\; w \in b_E) \Big\}$.

La clase de los hijos de un nodo bien podría ser una clase propia y no formar un conjunto. Usamos las clases solo como ayuda a la notación, y es importante tener presente que están formadas solamente de conjuntos –de clases impropias– y no de clases propias. En general, **no** tiene sentido "hablar" de una clase de clases de nodos, por ejemplo de $\{ b_E / b \in a_E \}$. Esto cobraría sentido solo para el caso en que las clases b_E's fueran conjuntos.

De ahora en adelante, exigiremos que E sea izquierda limitada, sobre M, según Σ.

Así $\{ b_E / b \in a_E \}$ es una clase de conjuntos y, como notación, podemos tomar su unión. No podemos dejar de mencionar que, si quisiéramos que esta clase fuera un conjunto bastaría con tener que Σ también contenga al esquema de Sustitución, $\mathbf{ZF}_8$.

Resumiendo, si $\mathbf{ZF}_1$, $\mathbf{ZF}_4 \in \Sigma$ y $\Sigma \vdash E$ es izquierda limitada, sobre M, entonces

$$(\mathbf{ZF}_4)^{M,E} \leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M\Big[z_E = \bigcup \Big\{ y_E \;/\; y \in a_E \Big\} \Big]$$

Si además, $\Sigma \vdash \forall x \in M\, \exists ! z \in M\Big[z_E = \bigcup \Big\{ y_E \;/\; y \in a_E \Big\} \Big]$, podemos introducir la siguiente

Notación:

$$\bigcup\nolimits^{M,E} : M \to M$$
$$\forall a \in M, \quad \bigcup\nolimits^{M,E} a = c$$

donde c es el único nodo de M tal que el conjunto $c_E = \bigcup \Big\{ b_E \;/\; b \in a_E \Big\}$.

Podremos hablar de la unión de dos conjuntos siempre y cuando tengamos el axioma del par. Si además de lo exigido anteriormente, se tiene que $\mathbf{ZF}_3 \in \Sigma$ y

$\Sigma \vdash \left(\mathbf{ZF}_3\right)^{M,E}$ podemos introducir la siguiente funcional,

$$\_ \cup^{M,E} \_ : M \times M \rightarrow M$$
$$\forall a, b \in M, \quad a \cup^{M,E} b = c$$

donde c es el único nodo de M tal que $c_E = a_E \cup b_E$.

Para un modelo estandar M se tiene, si $a, b \in M$, entonces $\bigcup^{M,\in} a = \bigcup a$ y $a \cup^{M,\in} b = a \cup b$.

- Consideremos la fórmula $\varphi(x,y) \leftrightharpoons \forall z\Big[z \in x \;\rightarrow\; z \in y\Big]$, la cual tiene como únicas variables a x y a y. Tenemos derecho de extender al lenguaje con una letra predicativa binaria, a saber $\subseteq$. El axioma definitorio que aumentamos a Σ es,

$$\forall x \forall y \left(x \subseteq y \;\leftrightarrow\; \forall z\Big[z \in x \;\rightarrow\; z \in y\Big]\right)$$

Esto repercute en M,E como sigue, si $a, b \in M$, entonces

$$\begin{aligned} a \subseteq^{M,E} b &\;\leftrightarrow\; (a \subseteq b)^{M,E} \\ &\;\leftrightarrow\; \varphi^{M,E}(a,b) \\ &\;\leftrightarrow\; a_E \subseteq b_E \end{aligned}$$

Así resulta que, $\subseteq^{M,E} \;\subseteq M \times M$.

- **$\mathbf{ZF}_5$: Axioma de Potencia**.

$$(\mathbf{ZF}_5)^{M,E} \leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M\Big[z_E = \Big\{w \in M \;/\; w_E \subseteq x_E\Big\}\Big]$$

Si $\mathbf{ZF}_1$, $\mathbf{ZF}_5 \in \Sigma$ y $\Sigma \vdash E$ es Izquieda Limitada, sobre M, entonces

$$(\mathbf{ZF}_5)^{M,E} \leftrightarrow \forall x \in M \exists z \in M\Big[z_E = \Big\{w \in M \;/\; w_E \in \wp(x_E)\Big\}\Big]$$

Si además, $\Sigma \vdash \forall x \in M\, \exists! z \in M\Big[z_E = \Big\{w \in M \;/\; w_E \in \wp(x_E)\Big\}\Big]$, tenemos derecho a introducir la siguiente,

Notación:

$$\wp^{M,E} : M \rightarrow M$$
$$\forall a \in M, \quad \wp^{M,E}(a) = c$$

donde c es el único nodo de M tal que $c_E = \Big\{w \in M \;/\; w_E \in \wp(x_E)\Big\}$.

Si además se tiene que M,E es modelo de **ZF$_3$**, según Σ, también tenemos el "producto carteciano" para M,E.

$$\times^{M,E} \; : M \times M \to M$$
$$\forall a,b \in M, \quad a \times^{M,E} b = c$$

donde c es el único nodo de M tal que $c_M = \left\{ \langle x,y \rangle^{M,E} \;/\; x \in a_E \;\&\; y \in b_E \right\}$.

Para M es un modelo estandar tendríamos que

1. Si $a \in M$, entonces $\wp^{M,\in}(a) = \wp(a) \cap M$.

2. Si $a,b \in M$, entonces $a \times^{M,E} b = a \times b$

- **ZF$_6$** : **Esq. Ax. de Comprensión**

Sea φ una $\in$–fórmula, donde la variable z no ocurre.

$$(\mathbf{ZF_6})^{M,E} \leftrightharpoons \forall x \in M \, \exists z \in M \left[z_M = \left\{ w \in x_M \;/\; \varphi^{M,\leftarrow}(w) \right\} \right]$$

Si **ZF$_1$** $\in \Sigma$ y $\Sigma \vdash M,\in$ es un modelo estandar, entonces desde Σ,

$$(\mathbf{ZF_6})^{M,\in} \leftrightarrow \forall x \in M \, \exists z \in M \left[z = \left\{ w \in x \;/\; \varphi^{M,\in}(w) \right\} \right]$$

En resumen tenemos, para cualquier $\varphi(w) \in FRM_{\in}$, desde Σ se tiene

$$(\mathbf{ZF}_6)^{M,\in} \leftrightarrow \forall x \in M \left[\; \left\{ w \in x \;/\; \varphi^{M,\in}(w) \right\} \in M \; \right]$$

Como un corolario tenemos un caso particular que usaremos más adelante.

- Si $\Sigma \vdash \forall x \in M \, \forall y \left[y \subseteq x \;\to\; y \in M \right]$, entonces $\Sigma \vdash \left(\mathbf{ZF}_6 \right)^{M,\in}$.

Veamos una aplicación.

Sean $M = \{ \emptyset \}$ y $E = \;\in_M$. Puesto que M es una clase no–vacía y transitiva, tenemos que $\left(\mathbf{ZF}_1 \right)^{M,\in}$ y $\left(\mathbf{ZF}_2 \right)^{M,\in}$. Además, como $\forall x \in M \, \forall y \left[y \subseteq x \;\to\; y \in M \right]$, por el corolario anterior se tiene que $\left(\mathbf{ZF}_6 \right)^{M,\in}$. Pero también se tiene que $\left(\forall x \left[\; x = \emptyset \; \right] \right)^{M,\in}$. Con esto tenemos,

- $CON\left(\mathbf{ZF_1} + \mathbf{ZF_2} + \mathbf{ZF_3} \right) \Rightarrow CON\left(\mathbf{ZF_1} + \mathbf{ZF_2} + \mathbf{ZF_6} + \forall x \left[\; x = \emptyset \; \right] \right)$
- $CON\left(\mathbf{ZF_1} + \mathbf{ZF_2} + \mathbf{ZF_3} \right) \Rightarrow \mathbf{ZF_1}, \mathbf{ZF_2}, \; \mathbf{ZF_6} \nvdash \exists x \left[\; x \neq \emptyset \right]$

Vamos rumbo al axioma de Infinito, necesitamos ver como trabajan las nociones de sucesor y de inductivo en nuestro modelo interno M,E.

Partimos de que **ZF**$_1$, **ZF**$_2$, **ZF**$_3$, **ZF**$_4$ $\in \Sigma$. Con esto, tenemos derecho de agregar a nuestro lenguaje el símbolo funcional $\_^+$ el cual trabaja así, cqsea x, se tiene que $x^+ = x \cup \{x\}$.

Ahora, si $\Sigma \vdash \left(\mathbf{ZF_1} + \mathbf{ZF_2} + \mathbf{ZF_3} + \mathbf{ZF_4}\right)^{M,E}$ tenemos,

$$(\_)^{+^{M,E}} : M \to M$$
$$\forall a \in M, \quad a^{+^{M,E}} = a \cup^{M,E} \{a\}^{M,E}$$

Por lo que para un $a \in M$, tenemos que $a^{+^{M,E}}$ es el único nodo de M tal que $\left(a^{+^{M,E}}\right)_E = a_E \cup \{a\}$.

Los primeros números naturales de M,E son,

$0^{M,E} = \emptyset^{M,E}$. Es decir, $(0^{M,E})_E = \emptyset$.

$1^{M,E} = (0^{M,E})^{+^{M,E}} = 0^{M,E} \cup^{M,E} \{0^{M,E}\}^{M,E}$. Es decir, $(1^{M,E})_E = \emptyset \cup \{0^{M,E}\} = \{0^{M,E}\}$.

$2^{M,E} = (1^{M,E})^{+^{M,E}} = 1^{M,E} \cup^{M,E} \{1^{M,E}\}^{M,E}$. Es decir, $(2^{M,E})_E = \{0^{M,E}, 1^{M,E}\}$

$3^{+^{M,E}} = (2^{M,E})^{+^{M,E}}$. Es decir, $\left(3^{+^{M,E}}\right)_E = \{0^{M,E}, 1^{M,E}, 2^{M,E}\}$

$\vdots$

$(n+1)^{+^{M,E}} = n^{M,E} \cup^{M,E} \{n^{M,E}\}^{M,E}$. Es decir, $\left((n+1)^{+^{M,E}}\right)_E = \{0^{M,E}, \ldots, n^{M,E}\}$

$\vdots$

Si es el caso que M,E es un Modelo Estandar, desde Σ, tendremos que si $a \in M$, entonces

$$a^{+^{M,\in}} = a \cup^{M,\in} \{a\}^{M,\in} = a \cup \{a\} = a^+$$

Y por tanto, $0^{M,\in} = 0, \quad 1^{M,\in} = 1, \quad 2^{M,\in} = 2, \ \ldots$

- **ZF**$_7$: Axioma de Infinito

$$(\mathbf{ZF_7})^{M,E} \leftrightarrow \exists x \in M\left[\emptyset^{M,E} \in x_E \ \& \ \forall y \left(y \in x_E \to y^{+^{M,E}} \in x_E\right)\right]$$

Si M,E es un Modelo Estandar, según Σ, entonces

$$(\mathbf{ZF_7})^{M,\in} \leftrightarrow \exists x \in M\left[\emptyset \in x \ \& \ \forall y \left(y \in x \to y^+ \in x\right)\right]$$

Así, según Σ, tenemos que M será modelo de **ZF**$_7$, syss M tiene como elemento a un inductivo.

- **ZF$_8$** : Esquema Axiomático de Sustitución o de Reemplazo

Sea $\varphi(x,y)$ una $\in$–fórmula, donde las variables x e y ocurren libres y la variable z no ocurre libre.

$$\left(\mathbf{ZF_8}\right)^{M,E} \leftrightharpoons \Big(\forall x \in M\, \exists! y \in M\, \varphi^{M,E}(x,y) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \forall u \in M\, \exists z \in M \Big[z_E = \Big\{ y \in M \;/\; \exists x \Big(x \in u_E \;\&\; \varphi^{M,E}(x,y) \Big) \Big\} \Big] \Big)$$

Supongamos ahora que **ZF$_1$** $\in \Sigma$ y que $M,\in$ es un Modelo Estandar, según Σ. Así, $M,\in$ será modelo de **ZF$_8$**, según Σ, syss desde Σ se puede probar el siguiente enunciado,

$$\forall x \in M\, \exists! y \in M\, \varphi^{M,\in}(x,y) \rightarrow \forall u \in M \Big[\Big\{ y \in M \;/\; \exists x \Big(x \in u \;\&\; \varphi^{M,\in}(x,y) \Big) \Big\} \in M \Big]$$