Absolutez

En estas secciones, con la intensión de ser lo más general posible, partimos bajo el siguiente escenario, tendremos a $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_{\in}^{0}$ y a M y N dos clases ($\in$–fórmulas) arbitrarias, con la única condición de que $\Sigma \vdash \exists x\ (x \in \mathrm{M})$ y $\Sigma \vdash \exists x\ (x \in \mathrm{N})$. La interpretación de la pertenencia, de $\in$, será la misma pertenencia, es decir, $\in_{\mathrm{M}}$ y $\in_{\mathrm{N}}$.

Es preciso comentar que nuestros modelos, M y N, no necesariamente son estándar. Cuando se necesite que sean transitivos, se hará explícito.

Definición$_1$. Sean $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \mathscr{L}_{\in}^{n}$.

I. Diremos que φ es *Absoluta* M, N, *según* Σ, syss

a). $\Sigma \vdash \mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ Y

b). $\Sigma \vdash \forall x_1,\dots,x_n \in \mathrm{M}\left[\varphi^{\mathrm{M}}(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{N}}(x_1,\dots,x_n)\right]$

II. Diremos que φ es *Absoluta para* M, *según* Σ, syss φ es absoluta M, V, según Σ. Es decir,

$$\Sigma \vdash \forall x_1,\dots,x_n \in \mathrm{M}\left[\varphi^{\mathrm{M}}(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n)\right]$$

Observaciones. (En Σ)

1. Si φ es absoluta tanto para M como para N y $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$, entonces φ es absoluta M, N.

2. $(v_0 = v_1)$ y $(v_0 \in v_1)$ son absolutas para cualquier par M, N siempre que $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$.

3. Si φ y ψ son absolutas M, N, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi\ \&\ \psi$ son absolutas M, N.

Podemos enunciar la siguiente,

Proposición$_1$. (En Σ) Para cualesquiera clases M y N, con $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$, y cualquier $\varphi \in \mathrm{FRM}_{\in}$ se tiene que, si φ es booleana (sin cuantificadores), entonces φ es absoluta M, N.

Fórmulas más complejas en general, ya no son absolutas. Por ejemplo, partamos de un Σ lo suficientemente expresivo, como para tener a $\mathrm{M} = \{0, \{1\}\}$. Siendo cierto que $\left(\forall x\,(x \in \{1\} \to x \in 0)\right)^{\mathrm{M}}$, tenemos $\{1\} \subseteq^{\mathrm{M}} 0$; sin embargo $\{1\} \nsubseteq 0$. Para este M, la relacional $\subseteq$ no es absoluta. Y por tanto no para toda clase.

En modelos transitivos algunas fórmulas que son cuantificaciones sobre booleanas resultan ser absolutas, sin embargo hay principios más generales que nos permiten esclarecer la absolutez.

Proposición$_2$. (En Σ) Sean M y N clases transitivas, $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$, y $\varphi\left(x, y, z_1,\dots,z_n\right) \in \mathscr{L}_{\in}^{n+2}$ la cual es absoluta M, N. Así,

$$\exists x \Big(x \in y \ \& \ \varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n) \Big)$$

es absoluta M, N.

Prueba: Sean $y,\ z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{M}$. Tenemos,

$$\Big(\exists x \ \big(x \in y \ \& \ \varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n) \big) \Big)^{\mathrm{M}} \leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \quad \exists x \in \mathrm{M} \ \big(x \in y \ \& \ \varphi^{\mathrm{M}}(x, y, z_1, \ldots, z_n) \big) && \text{Def.} \\
&\leftrightarrow \quad \exists x \in \mathrm{M} \ \big(x \in y \ \& \ \varphi^{\mathrm{N}}(x, y, z_1, \ldots, z_n) \big) && \varphi \text{ abs. M, N} \\
&\leftrightarrow \quad \exists x \in \mathrm{N} \ \big(x \in y \ \& \ \varphi^{\mathrm{N}}(x, y, z_1, \ldots, z_n) \big) && \mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}; \\
& && y \in \mathrm{M} \text{ y M transa} \\
&\leftrightarrow \quad \big(\exists x \ \big(x \in y \ \& \ \varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n) \big) \big)^{\mathrm{N}} && \text{Def.}
\end{aligned}$$

☠

Algunas veces, en lugar de escribir $\exists x \big(x \in y \ \& \ \varphi\big)$, escribiremos $\exists x \in y \ \varphi$. Y diremos que $\exists x \in y$ es un *Cuantificador Acotado.* A una fórmula con todos sus cuantificadores acotados se le llama una *Fórmula* Δ_0. Demos una definición rigurosa de esto.

Definición₂. El conjunto de *Fórmulas* Δ_0 es el $\subseteq$–menor conjunto de $\in$–expresiones que cumple con,

I. Para cualquier $x,\ y \in \mathrm{VAR}$, se tiene que $(x \in y) \in \Delta_0$ y $(x = y) \in \Delta_0$. Y

II. Para $x,\ y \in \mathrm{VAR}$, $\varphi,\ \psi \in \mathrm{FRM}_{\in}$ se tiene que

- **a).** Si $\varphi,\ \psi \in \Delta_0$, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \ \& \ \psi) \in \Delta_0$, y
- **b).** Si $\varphi \in \Delta_0$, entonces $\exists x \ (x \in y \ \& \ \varphi) \in \Delta_0$.

Con esto podemos enunciar el siguiente,

Corolario₃. (En Σ) Sean M y N clases transitivas y $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$. Así,

1. Si $\varphi \in \Delta_0$, entonces φ es absoluta M, N. En particular,

2. Si $\varphi \in \Delta_0$, entonces φ es absoluta para M.

Por ejemplo $x \subseteq y$, **NO** es una fórmula Δ_0, pero es absoluta para modelos transitivos; el criterio anterior, no lo podemos aplicar. Sin embargo,

$$\begin{aligned}
(x \subseteq y) \quad &\leftrightharpoons \quad \forall w \ (w \in x \to w \in y) \\
&\leftrightarrow \quad \neg\exists w \ \big(w \in x \ \& \ w \notin y \big) \\
&\leftrightarrow \quad \neg\exists w \in x \ \big(w \notin y \big)
\end{aligned}$$

Esta resulta ser equivalente a una Δ_0. No es difícil probar que fórmulas las cuales son equivalentes a fórmulas Δ_0 también son absolutas. Esto lo enunciamos así,

Proposición$_4$. Sean $\Sigma \cup \Gamma \subseteq \mathscr{L}_\in^0$ y $\varphi, \psi \in \mathscr{L}_\in^n$. Sean M y N clases tales que $\Sigma \vdash \mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$. Así,

1. Si $\Sigma \vdash \Gamma^{\mathrm{M}}$ y $\Sigma \vdash \Gamma^{\mathrm{N}}$ y

$$\Gamma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)\right]$$

entonces φ es absoluta M, N, según Σ syss ψ es absoluta M, N, según Σ.

Se podría pedir *algo más débil,*

2. Si

a). $\Sigma \vdash \left(\forall x_1, \ldots, x_n \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)\right]\right)^{\mathrm{M}}$ Y

b). $\Sigma \vdash \left(\forall x_1, \ldots, x_n \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)\right]\right)^{\mathrm{N}}$,

entonces φ es absoluta M, N, según Σ syss ψ es absoluta M, N, según Σ. ☠

Con esto tenemos inmediatamente el siguiente,

Corolario$_5$. (En Σ) Sean M y N clases transitivas y $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$. Así,

1. Si $\varphi \in \Delta_0$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$, entonces ψ es absoluta M, N. Y

2. Si $\varphi \in \Delta_0$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$, entonces ψ es absoluta para M.

Tenemos dos ejemplos,

1. $x \subseteq y$ es absoluta, es decir la fórmula $\forall w\,(w \in x \to w \in y)$, para cualquier clase transitiva, según Σ. Y
2. Si $\varphi \in \Delta_0$ o φ es absotuta M, N, entonces $\forall x \in y\, \varphi$ es absoluta M, N; para clases transitivas, según Σ.