Absolutez para definidos

Pasemos ahora a ver la absolutez de algunas nociones definidas, como son las relacionales, las funcionales y las constantes.

Las definiciones de todas y cada una de ellas están dentro de un contexto, es decir, se hacen a partir de un conjunto de axiomas, digamos $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_{\in}^{0}$

Para definir una relacional R de aridad n, en Σ, necesitamos una $\in$–fórmula con exactamente n variables libres, digamos $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Con ello, podemos agregar a nuestro lenguaje, $\mathscr{L}_{\in}$, un –nuevo– símbolo, una letra predicativa de aridad n, a R. Ahora ya podemos definir la absolutez para relacionales.

Definición. Sean M, N clases y R una relacional definida por la $\in$–fórmula φ. Diremos que R es *Absoluta* M, N, según Σ, syss φ es absoluta M, N, según Σ.

Obsérvese que, independientemente de la absolutez o no de la relacional R, tenemos derecho de hablar de la relativización de su fórmula definitoria φ^{M} y por tanto de R^{M}. A manera de ejemplo, para cualquier M, si $a, b \in \mathrm{M}$ tiene sentido preguntarse si $a \subseteq^{\mathrm{M}} b$.

Las cosa no es tan fácil para las funcionales. Para definir una funcional de aridad n, digamos F, en Σ, necesitamos una $\in$–fórmula con exactamente $n+1$ varibles libres, digamos $\psi\left(x_1, \dots, x_n, y\right)$, pero también tener algo muy importante y es que

$$\Sigma \vdash \forall x_1, \dots, x_n\, \exists! y\, \psi\left(x_1, \dots, x_n, y\right)$$

Siendo el caso, podemos agregar a nuestro lenguaje un nuevo símbolo, una letra funcional de aridad n, a F. En el caso en que se tenga $\psi(a_1, \dots, a_n, b)$, escribiremos $\mathrm{F}(a_1, \dots, a_n) = b$

Definición. Sean M, N clases y F una funcional definida por $\psi\left(x_1, \dots, x_n, y\right)$, en Σ. Supongamos además que

i). $\Sigma \vdash \left(\forall x_1, \dots, x_n\, \exists! y\, \psi\left(x_1, \dots, x_n, y\right)\right)^{\mathrm{M}}$ Y

ii). $\Sigma \vdash \left(\forall x_1, \dots, x_n\, \exists! y\, \psi\left(x_1, \dots, x_n, y\right)\right)^{\mathrm{N}}$

Diremos que F es *Absoluta* M, N, según Σ, syss ψ es absoluta M, N, según Σ.

Observemos que, teniendo **i)** y **ii)**, tenemos el derecho de hablar de F^{M} y de F^{N}. Con lo que resulta que, si $\Sigma \vdash \mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ entonces

$$\text{F es absoluta } \mathrm{M}, \mathrm{N}, \text{ según } \Sigma, \text{ syss}$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{M}\ \left(\mathrm{F}^{\mathrm{M}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{F}^{\mathrm{N}}(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

o, en breve,

$$\mathrm{F} \text{ es absoluta } \mathrm{M}, \mathrm{N}, \text{ según } \Sigma, \text{ syss } \mathrm{F}^{\mathrm{M}} = \mathrm{F}^{\mathrm{N}} \restriction \mathrm{M}^n$$

Algo muy similar tenemos para las definiciones de las constantes. Para definir una constante en Σ, digamos c, necesitamos una $\in$–fórmula con exactamente una variable libre, digamos $\chi(y)$ y tener que

$$\Sigma \vdash \exists! y\, \chi(y)$$

Y podremos agregar al lenguaje la constante c.

Definición. Sean M, N clases y c una funcional definida por $\chi(y)$, en Σ. Supongamos además que

$$\Sigma \vdash \left(\exists! y\, \chi(y)\right)^{\mathrm{M}} \qquad \text{y} \qquad \Sigma \vdash \left(\exists! y\, \chi(y)\right)^{\mathrm{N}}$$

Diremos que c es *Absoluta* M, N, según Σ, syss χ es absoluta M, N, según Σ.

Si $\Sigma \vdash \mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$, entonces c es absoluta M, N, según Σ syss

$$\Sigma \vdash c^{\mathrm{M}} = c^{\mathrm{N}}$$