Propiedades sobre Absolutez

Proposición$_1$. Sean M una clase y $\Sigma = \mathbf{Z}^- \setminus \{\mathbf{ZF_5},\ \mathbf{ZF_7}\}$. Supongamos que $\Sigma \vdash \Sigma^{\mathrm{M}}$ y que $\Sigma \vdash$ M es transitiva. Cada una de las siguientes relacionales, funcionales y constantes son equivalentes a una fórmula Δ_0 y por tanto son absolutas para M, según Σ.

a). $x = y$	**f).** $\langle x,\ y\rangle$	**k).** x^+
b). $x \in y$	**g).** $\varnothing$	**l).** x es transitivo
c). $x \subseteq y$	**h).** $x \cup y$	**m).** $\bigcup x$
d). $\{x,\ y\}$	**i).** $x \cap y$	**n).** $\bigcap x$ s.q. $x \neq \varnothing$
e). $\{\,x\,\}$	**j).** $x \setminus y$	

Prueba:

d). $\{x,\ y\} = z \leftrightarrow \Big[x \in z\ \&\ y \in z\ \&\ \forall w\big(w \in z \rightarrow w = x \vee w = y\big)\Big]$

e). $\{\,x\,\} = z \leftrightarrow \Big[x \in z\ \&\ \forall w\big(w \in z \rightarrow w = x\big)\Big]$ ☠

Proposición$_2$. Las nociones absolutas son cerradas bajo composición.
Sean M y N clases, $\varphi(x_1,\ldots,\ x_n)$ una $\in$–fórmula y sean $\mathrm{F}(x_1,\ldots,\ x_n)$ y $\mathrm{G}_i\left(y_1,\ldots,\ y_m\right)$ (con $i \in \{1,\ldots,\ n\}$) funcionales, según Σ. Si φ, F y G son absolutas M, N, según Σ, entonces también lo son,

a). La $\in$–fórmula $\varphi\left(\mathrm{G}_1\left(y_1,\ldots,\ y_m\right),\ldots,\ \mathrm{G}_n\left(y_1,\ldots,\ y_m\right)\right)$, y

b). La funcional $\mathrm{F}\left(\mathrm{G}_1\left(y_1,\ldots,\ y_m\right),\ldots,\ \mathrm{G}_n\left(y_1,\ldots,\ y_m\right)\right)$

Prueba: Para el caso $n = m = 1$, Si $y \in \mathrm{M}$, entonces

$$\left(\varphi\left(\mathrm{G}(y)\right)\right)^{\mathrm{M}} \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{M}}\left(\mathrm{G}^{\mathrm{M}}(y)\right) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{N}}\left(\mathrm{G}^{\mathrm{N}}(y)\right) \leftrightarrow \left(\varphi\left(\mathrm{G}(y)\right)\right)^{\mathrm{N}}$$

y análogamente tenemos,

$$\left(\mathrm{F}\left(\mathrm{G}(y)\right)\right)^{\mathrm{M}} = \mathrm{F}^{\mathrm{M}}\left(\mathrm{G}^{\mathrm{M}}(y)\right) = \mathrm{F}^{\mathrm{N}}\left(\mathrm{G}^{\mathrm{N}}(y)\right) = \left(\mathrm{F}\left(\mathrm{G}(y)\right)\right)^{\mathrm{N}}$$

☠

Por ejemplo, en la **Proposición$_1$.**
f). $\langle x,\ y\rangle = \big\{\{x, y\},\ \{x\}\big\}$ es absoluta para M, según Σ, pues

$$\langle x,\ y\rangle = \mathrm{F}\left(\mathrm{G}_1(x, y),\ \mathrm{G}_2(x, y)\right)$$

donde $\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{G}_1(x, y) = \{x, y\}$ y $\mathrm{G}_2(x, y) = \{x\}$ las cuales son absolutas para M, según Σ.

Proposición$_3$. Sean M una clase, $\Sigma = \mathbf{ZF_1} + \mathbf{ZF_2} + \mathbf{ZF_3} + \mathbf{ZF_4} + \mathbf{ZF_5} + \mathbf{ZF_6}$ y $\Gamma = \Sigma - \mathbf{ZF_5}$. Supongamos que $\Sigma \vdash \Gamma^{\mathrm{M}}$ y que $\Sigma \vdash$ M es transitiva y no vacía. Las siguientes relacionales y funcionales son absolutas para M, según Σ.

a).	z es un par ordenado	**e).**	$\mathrm{IMG}(r)$
b).	$a \times b$	**f).**	r es función
c).	r es una relación	**g).**	$r(x)$
d).	$\mathrm{DOM}(r)$	**h).**	r es una función 1 a 1

Prueba: a). Tenemos que

$$z \text{ es un par ordenado} \leftrightarrow \exists x \in \bigcup z\ \exists y \in \bigcup z\ \Big[z = \langle x,\ z\rangle\Big]$$

y ahora usando la proposición anterior, para $\mathrm{G}_1(z) = \mathrm{G}_2(z) = \bigcup z$ y $\mathrm{G}_3(z) = z$ y tomando $\varphi(u,\ v,\ w)$ como

$$\exists x \in u\ \exists y \in v\ \Big[w = \langle x,\ z\rangle\Big]$$

Tenemos que,

$$z \text{ es un par ordenado} \leftrightarrow \varphi\Big(\mathrm{G}_1(z),\ \mathrm{G}_2(z),\ \mathrm{G}_3(z)\Big)$$

Los demás se dejan al lector. ☠

Proposición₄. Sean Σ, Γ y M como en la proposición anterior.
Para $a,\ r \in \mathrm{M}$ se tiene que,

1. r ordena parcialmente a a syss $(r \text{ ordena parcialmente a } a)^{\mathrm{M}}$

2. r ordena totalmente a a syss $(r \text{ ordena totalmente a } a)^{\mathrm{M}}$

3. Si r bien ordena a a, entonces $(r \text{ bien ordena a } a)^{\mathrm{M}}$

Prueba: 1 y **2** son inmediatas del hecho de que las relaciones son equivalentes a fórmulas Δ_0 y por tanto, absolutas para M. Veamos **3**.
Por lo visto antes, tenemos que $(r \text{ ordena totalmente a } a)^{\mathrm{M}}$. Solo nos fataría ver que $\big(\forall x\ \varphi(x,\ a,\ r)\big)^{\mathrm{M}}$, donde $\varphi(x,\ a,\ r)$ es la fórmula,

$$x \subseteq a\ \&\ x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x\left(\big\langle z,\ y\big\rangle \notin r\right)$$

Ahora bien, la fórmula φ es absoluta para M, por lo visto antes; por tanto solo falta ver que $\forall x \in \mathrm{M}\ \varphi(x,\ a,\ r)$. Pero esto es inmediato de nuestra hipótesis, que lo que afirma es que $\forall x\ \varphi(x,\ a,\ r)$. ☠

OjO: El regreso de **4.3**, no lo podemos desprender del resultado anterior.

Proposición₅. R_ω es un modelo (transitivo) de $\mathbf{ZFC} - \mathbf{ZF_7} + \neg\, \mathbf{ZF_7}$, según $\mathbf{ZF}^-$.
Es decir,

$$\mathbf{ZF}^- \vdash \Big(\mathbf{ZFC}\ -\ \mathbf{ZF_7}\ +\ \neg\, \mathbf{ZF_7}\Big)^{\mathrm{R}_\omega}$$

Prueba: Ya se probó que R_ω es modelo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{ZF_7} + \neg\, \mathbf{ZF_7}$, según $\mathbf{ZF}^-$. Veamos que $\mathbf{AE}^{\mathrm{R}_\omega}$. Para esto hay que probar que

$$\forall a \in \mathrm{R}_\omega\ \exists r \in \mathrm{R}_\omega\ [r \text{ bien ordena a } a]^{\mathrm{M}}$$

Si $a \in R_\omega$, entonces a es finito y por tanto hay un $r \subseteq a \times a$ tal, que r bien ordena a a, con $r \in R_\omega$. El resultado se sigue del lema anterior.

☠

Corolario$_6$. $$\text{CON}(\mathbf{ZF}^-) \Rightarrow \text{CON}\left(\mathbf{ZFC} - \mathbf{ZF_7} + \neg\, \mathbf{ZF_7}\right)$$

Para terminar esta sección, veamos qué más podemos decir de $\text{BF} = \bigcup_{\alpha \in \text{OR}} R_\alpha$.

Probamos que BF es un modelo de **ZF**, según $\mathbf{ZF}^-$. Pero ¿qué ocurre con el **AE**? No se puede decir mucho, veamos.

Proposición$_7$($\mathbf{ZF}^-$). Sea $a \in \text{BF}$. Así,

$$a \text{ es bien ordenable syss } (a \text{ es bien ordenable})^{\text{BF}}$$

Prueba: Sea pues $a \in \text{BF}$.
Supongamos que a es bien ordenable y sea $r \subseteq a \times a$ tal que r bien ordene a a. Tenemos que $a \times a \in \text{BF}$ y también que $r \in \text{BF}$. Por la **Prop$_{4.3}$**, tenemos que (r bien ordena a a)$^{\text{BF}}$ y de aquí que (a es bien ordenable)$^{\text{BF}}$.
Ahora supongamos que (a es bien ordenable)$^{\text{BF}}$. Hay pues, un $r \in \text{BF}$ tal que (r bien ordena a a)$^{\text{BF}}$. Entonces, gracias a la **Prop$_{4.2}$**, tenemos que r ordena totalmente a a. Finalmente, tomando en cuenta que todo subconjunto de a, perteneciente a BF, tiene elemento r–minimal, tenemos que todo subconjunto de a lo tiene, ya que los subconjuntos de a siempre son elementos de BF. ☠

Con esto terminamos con dos pequeños resultados.

Corolario$_8$($\mathbf{ZF}^-$).

$$\text{Si } \mathbf{AE}, \text{ entonces } (\mathbf{AE})^{\text{BF}}$$

OjO: El regreso no lo podemos desprender del resultado anterior.

Corolario$_9$.

$$\text{CON}(\mathbf{ZFC}^-) \Rightarrow \text{CON}(\mathbf{ZFC})$$