# El Universo Constructible L

## Definiendo Definibilidad

Aquí trabajaremos en $\Sigma = \mathbf{ZF}$ ( de hecho en $\mathbf{ZF} - \mathbf{ZF_5}$).

¿Qué entendemos por que un conjunto sea definible? Lo primero que se nos ocurre pensar es que dicho conjunto lo podemos describir por medio de propiedades, es decir por medio de una fórmula de nuestro lenguaje $\left(\mathscr{L}^1_\in\right)$. Hay un problema de entrada y es que no toda fórmula describe un conjunto, podría ser muy grande –una clase propia. Restrinjámoslo entonces a subconjuntos de un conjunto dado (tenemos de nuestro lado al axioma de comprensión). Por lo pronto pongamos que $\mathrm{D}f\,(a)$ denota al conjunto de subconjuntos definibles de $a$.

Ahora bien, en tal caso, no podemos dejar que la fórmula que define al subconjunto sea arbitraria, los cuantificadores "hablarían" de posibles conjuntos que no estuvieran dentro de nuestro conjunto $a$, lo que podemos hacer ahora es restringir las fórmulas a fórmulas relativizadas a dicho conjunto. Las cosas irían así,

Sean $a \in \mathrm{V}$ y $b \subseteq a$. Será $b$ un conjunto **DEFINIBLE**, en $a$, con la notación $b \in \mathrm{D}f\,(a)$, syss hay una $\varphi \in \mathscr{L}^1_\in$ tal, que

$$b = \left\{ s \in a \;/\; \varphi^a\,(s) \right\}$$

Ahora, pensemos no solo en conjuntos de elementos de $a$. pensemos más en general, en relaciones de cualquier aridad, sobre $a$. Denotemos por lo pronto como $\mathrm{D}f\,(a,\ n)$ a las relaciones de aridad $n$ (con $n \in \omega$), que son definibles en $a$. Nos conviene que, si $r \subseteq a^n$, pensarlo como $r \subseteq\ ^n a$.

Nos gustaría pues, tener que $r \in \mathrm{D}f\,(a,\ n)$ syss hay una $\varphi \in \mathscr{L}^n_\in$ tal, que

$$r = \left\{ s \in\ ^n a \;/\; \varphi^a\,(s_0,\ \dots\ ,\ s_{n-1}) \right\}$$

Pero, ésta "definición", tal cual ! **NO** está dentro del Lenguaje de la Teoría de Conjuntos ! Nuestra teoría, la teoría de conjuntos de Zermelo–Frankel, está dentro de un Lenguaje Formal de Primer Orden, y no podemos cuantificar sobre fórmulas.

En aras de avanzar un poco más, podríamos preguntarnos ¿quién debería ser $\mathrm{D}f\,(a,\ n)$? para que al menos se tenga el "regreso" del bicondicional. Es decir ¿qué tiene que cumplir $\mathrm{D}f\,(a,\ n)$? para tener al menos como un esquema lo siguiente,

Para cada $\varphi\,(x_0,\ \dots\ ,\ x_{n-1})$, una $\in$–fórmula cuyas variables libres se encuentran entre $x_0,\ \dots\ ,\ x_{n-1}$, se tiene que

$$\forall a \left[ \left\{ s \in {}^n a \,/\, \varphi^a(s_0, \ldots, s_{n-1}) \right\} \in \mathrm{D}f\ (a,\ n) \right]$$

La prueba se haría por inducción sobre la formación de fórmulas y tendríamos que tener lo siguiente,

**1.** $\left\{ \langle s_i,\ s_j \rangle \,/\, s_i = s_j \right\} \in \mathrm{D}f\ (a,\ n)$

**2.** $\left\{ \langle s_i,\ s_j \rangle \,/\, s_i \in s_j \right\} \in \mathrm{D}f\ (a,\ n)$

**3.** Si $r \in \mathrm{D}f\ (a,\ n)$, entonces ${}^n a \setminus r \in \mathrm{D}f\ (a,\ n)$

**4.** Si $r,\ s \in \mathrm{D}f\ (a,\ n)$, entonces $r \cap s \in \mathrm{D}f\ (a,\ n)$ y

**5.** … **?**

La parte **5**, la del existencial, no está del todo clara el cómo debería de ser. Pero, creemos que lo discutido hasta aquí ayuda a entender la definición rigurosa de definibilidad.

**Definición₁.** Sean $a$ y $r$ conjuntos, $n \in \omega$ e $i, j \in n$.

**a).** $\mathrm{D}iag_{\in}(a,\ n,\ i,\ j) = \left\{ s \in {}^n a \,/\, s_i \in s_j \right\}$

**b).** $\mathrm{D}iag_{=}(a,\ n,\ i,\ j) = \left\{ s \in {}^n a \,/\, s_i = s_j \right\}$

**c).** $\mathrm{P}roy(a,\ r,\ n) = \left\{ s \in {}^n a \,/\, \exists t \in r\ \left( t \restriction n = s \right) \right\}$

Así, $\mathrm{D}iag_{\in}$, $\mathrm{D}iag_{=}$ y $\mathrm{P}roy$ son funcionales que toman como valor un subconjunto de ${}^n a$, es decir, una relación $n$–área sobre $a$.

**Definición₂.** Sea $a$ un conjunto.

**1.** Definimos $\forall n \in \omega\ \mathrm{D}f'(k,\ a,\ n)$ por recursión sobre $k$, como sigue,

**a).** $$\forall n \in \omega\ \mathrm{D}f'(0,\ a,\ n) = \left\{ \mathrm{D}iag_{\in}(a,\ n,\ i,\ j) \,/\, i,\ j < n \right\} \cup \cup \left\{ \mathrm{D}iag_{=}(a,\ n,\ i,\ j) \,/\, i,\ j < n \right\}$$

**b).** $$\begin{aligned} \forall n \in \omega\ \mathrm{D}f'(k+1,\ a,\ n) = {} & \mathrm{D}f'(k,\ a,\ n) \cup \\ & \cup \left\{ r \cap s \,/\, r,\ s \in \mathrm{D}f'(k,\ a,\ n) \right\} \\ & \cup \left\{ {}^n a \setminus r \,/\, r \in \mathrm{D}f'(k,\ a,\ n) \right\} \\ & \cup \left\{ \mathrm{P}roy(a,\ r,\ n) \,/\, r \in \mathrm{D}f'(k,\ a,\ m)\ \&\ m \geq n \right\} \end{aligned}$$

**2.** Para cada $n \in \omega$, sea $\mathrm{D}f(a,\ n) = \bigcup_{k\in\omega} \mathrm{D}f'(k,\ a,\ n)$

***OjO:*** Para un $n \in \omega$, se tiene que, $\mathrm{D}f(a,\ n)$ es cerrado bajo las operaciones: complemento, intersección y proyección. Es decir,

- Si $r,\ s \in \mathrm{D}f(a,\ n)$, entonces ${}^{n}a \setminus r,\ r \cap s \in \mathrm{D}f(a,\ n)$. Y
- Si $r \in \mathrm{D}f(a,\ m)$ con $m \geq n$, entonces $\mathrm{P}roy(a,\ r,\ n) \in \mathrm{D}f(a,\ n)$.

Veamos cómo recuperamos lo discutido anteriormente. La siguiente proposición es un esquema de teorema.

**Proposición₁** (Esquema)**.** Para toda $\in$–fórmula $\varphi$, si sus variables libres se encuentran entre $v_0,\ \ldots,\ v_{n-1}$, lo cual denotaremos por $\varphi(v_0,\ldots,\ v_{n-1})$, se tiene que

$$\forall a\left[\left\{s \in {}^{n}a \;/\; \varphi^{a}(s_0,\ \ldots,\ s_{n-1})\right\} \in \mathrm{D}f(a,\ n)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

**Prueba:** Sea $a$ cualquier conjunto. Procederemos por inducción sobre la complejidad[1] de las fórmulas, $\theta(\varphi)$. Sea pues, $\varphi$ una $\in$–fórmula arbitraria. Probemos que $\varphi$ tiene la propiedad $(*)$, bajo la suposición –**H**ipótesis **I**nductiva– de que toda fórmula de complejidad menor a $\theta(\varphi)$, la tiene. Tenemos 5 casos posibles.

**I.** $\varphi \leftrightharpoons (v_i \in v_j)(v_0,\ \ldots,\ v_{n-1})$.
La fórmula $\varphi$ tiene la propiedad $(*)$ pues, $\mathrm{D}iag_{\in}(a,\ n,\ i,\ j) \in \mathrm{D}f(a,\ n)$.

**II.** $\varphi \leftrightharpoons (v_i = v_j)(v_0,\ \ldots,\ v_{n-1})$.
La fórmula $\varphi$ tiene la propiedad $(*)$ pues, $\mathrm{D}iag_{=}(a,\ n,\ i,\ j) \in \mathrm{D}f(a,\ n)$.

Observe que **I)** y **II)** son ciertas para toda $n \in \omega$, con tal de que $n \geq\ max\{i, j\}$.

**III.** $\varphi \leftrightharpoons (\psi\ \&\ \chi)(v_0,\ \ldots,\ v_{n-1})$.
La fórmula $\varphi$ tiene la propiedad $(*)$ pues, $\mathrm{D}f(a,\ n)$ es cerrada bajo intersecciones.

**IV.** $\varphi \leftrightharpoons (\neg\varphi)(v_0,\ \ldots,\ v_{n-1})$.
La fórmula $\varphi$ tiene la propiedad $(*)$ pues, $\mathrm{D}f(a,\ n)$ es cerrada bajo complementos.

**V.** $\varphi \leftrightharpoons (\exists v_m\ \psi)(v_0,\ \ldots,\ v_{n-1})$.

[1] Aquí entenderemos por complejidad de una formula, el número de conectivos y cuantificadores que aparecen en ella. Una inducción sobre la complejidad de las fórmulas está perfectamente justificada.

Si la variable $v_m$ no ocurre libre en $\psi$, entonces
$$\left\{s \in {}^n a \;/\; \left(\exists v_m\,\psi\right)^a(s_0,\,\dots\,,\,s_{n-1})\right\} = \left\{t \in {}^n a \;/\; \psi^a(t_0,\,\dots\,,\,t_{n-1})\right\}$$
y el resultado se sigue de la **HI**.

Si $v_m$ ocurre libre en $\psi$, tenemos dos casos posibles, $v_m$ es alguna de las variables $v_0,\,\dots\,,\,v_{n-1}$ o no lo es [2].

Supongamos en primer lugar que $v_m \notin \{v_0,\,\dots\,,\,v_{n-1}\}$.
Así $\varphi \leftrightharpoons \left(\exists v_m\,\psi\right)$, con $m \geq n$ y $\psi(\,v_0,\dots,v_{n-1},v_n,\dots,v_m\,)$, con $v_m$ libre en $\psi$ [3]. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\{s \in {}^n a \;/\; \left(\exists v_m\,\psi\right)^a(s_0,\,\dots\,,\,s_{n-1})\right\} = \\
&\qquad = \left\{s \in {}^n a \;/\; \left(\exists v_m\,\psi(\,s_0,\dots,\,s_{n-1},v_n,\dots,v_m\,)\right)^a\right\} \\
&\qquad = \left\{s \in {}^n a \;/\; \exists v_m \in a\;\psi^a(\,s_0,\dots\,,s_{n-1},v_n,\dots,v_m\,)\right\} \\
&\qquad \overset{(\cdot)}{=} \mathrm{P}roy\left(a,\,\left\{t \in {}^{m+1} a \;/\; \psi^a(\,t_0,\dots,t_{n-1},t_n,\dots,t_m\,)\right\},\,n\right)
\end{aligned}$$

$(\cdot)$ Veamos la doble contención.
$\subseteq \Big]$ Supongamos que $s \in {}^n a$ y $b \in a$, con la propiedad de que $\psi^a(s_0,\,\dots\,,\,s_{n-1},v_n,\dots,v_{m-1},a_0)$. Sea $t = s^\wedge b^\wedge b^\wedge\dots^\wedge b$. Así, $t \in {}^{m+1}a$ y es tal, que $t \restriction n = s$ y $\psi^a(\,t_0,\dots,t_{n-1},t_n,\dots,t_m\,)$.
$\supseteq \Big]$ Sea $s \in {}^n a$ tal, que $s = t \restriction n$ para algún $t \in {}^{m+1}a$ con la propiedad de que $\psi^a(\,t_0,\dots,t_{n-1},t_n,\dots,t_m\,)$. Así, $\psi^a(\,s_0,\dots,s_{n-1},t_n,\dots,t_m\,)$. Por lo tanto, hay un elemento $b$ de $a$, a saber $t_m$, tal que $\psi^a(\,s_0,\dots\,,s_{n-1},v_n,\dots,a_0\,)$. Es decir, $\exists v_m \in a\;\psi^a(\,s_0,\dots\,,s_{n-1},v_n,\dots,v_m\,)$.

Ahora bien, tenemos que $\left\{t \in {}^{m+1}a / \psi^a(t_0,\dots,t_m\,)\right\} \in \mathrm{D}f\,(a,m+1)$, esto gracias a que $\theta\left(\psi\right) < \theta\left(\varphi\right)$ y a la **HI**. Por tanto,
$$\mathrm{P}roy\left(a,\,\left\{t \in {}^{m+1}a \;/\; \psi^a(\,t_0,\dots,t_m\,)\right\},\,n\right) \in \mathrm{D}f\;(a,\,n)$$
De esto se desprende lo que queríamos.

Veamos ahora el caso en que $v_m \in \{v_0,\,\dots\,,\,v_{n-1}\}$.
Aquí $m \in \{0,\dots,n-1\}$ y $v_m$ ocurre libre en $\psi$. Consideremos a la fórmula $\psi'$, la cual se obtiene a partir de $\psi$ al sustituir todas las ocurrencias libres de la variable $v_m$ por la variable $v_p$ donde, $p$ es el primer natural tal que $p \geq n$ y $v_p$ no ocurre en $\psi$ —Con esto tenemos que $\exists v_m\,\psi$ es lógicamente equivalente a la fórmula $\exists v_p\,\psi'$, cuyas variables libres se encuentran entre $\{v_0,\,\dots\,,\,v_{n-1}\}$— Por tanto,

$$\left\{\,s \in {}^n a \;/\; \left(\exists v_m\,\psi\right)^a(s_0,\,\dots\,,\,s_{n-1})\,\right\} = \left\{\,t \in {}^n a \;/\; \left(\exists v_p\,\psi'\right)^a(t_0,\dots,\,t_{n-1})\,\right\}$$

Al tener que $v_p \notin \{0,\dots,n-1\}$ y al ocurrir $v_p$ libre en $\psi'$ hemos reducido este caso, al caso anterior. ☠

[2] P.E. considérese, $\left(\exists v_{28}(v_0 \in v_{28})\right)(v_0,v_1,v_2)$.
[3] Ninguna de las variables $v_n,\dots,\,v_{m-1}$ ocurre libre en $\psi$.

## *OJO:*

El inverso del esquema de teorema anterior no se puede justificar rigurosamente en **ZF**, solo intuitivamente, “todo elemento de $\mathrm{D}f(a,n)$ está definido por una fórmula”.

“ **Prueba**”: Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de $\mathscr{L}_\in$ cuyas variables libres se encuentran entre $v_0, \ldots, v_{n-1}$. Es verdad que

$$\dot{\forall} a\, \dot{\forall} b \in \mathrm{D}f(a,\ n) \bigvee_{i\in\omega} \left[ b = \left\{ s \in {}^{n}a \;\Big/\; \varphi_i^a(s_0,\ \ldots\ ,\ s_{n-1}) \right\} \right]$$

y esto se puede ver haciendo una inducción sobre $k$ en nuestra definición,

$$\mathrm{D}f(a,n) = \bigcup_{k\in\omega} \mathrm{D}f'(k,a,n)$$

Así, intuitivamente, tenemos

$$\mathrm{D}f(a,n) = \left\{ \left\{ s \in {}^{n}a \;/\; \varphi^a(s_0,\ \ldots\ ,\ s_{n-1}) \right\} \Big/\ \varphi \in \mathscr{L}_\in^{<n} \right\}$$

Otra observación importante, balo la suposición del **AEN**, es que para cada conjunto $a$ y $n \in \omega$ se tiene,

$$\left| \mathrm{D}f(a,\ n) \right| \leq \aleph_0$$

pues $\mathrm{D}f(a,\ n)$ es la cerradura de un conjunto contable bajo un conjunto finito (tres) de operaciones.

**Proposición₂.** Sea M una clase tal que **ZF** $\vdash$ M es transitiva y **ZF** $\vdash$ (**ZF** $-$ **Pot**)$^{\mathrm{M}}$. Entonces $\mathrm{D}f(a,n)$ es absoluta para M, según **ZF**.

**Prueba:** Las funcionales $\mathrm{D}iag_\in$ y $\mathrm{D}iag_=$ son absolutas para M, según **ZF**. También lo son el complemento, la intersección y $\mathrm{P}roy$. Con esto tenemos que $\mathrm{D}f'(k,\ a,\ n)$ está definida recursivamente con funciones absolutas, ella misma es absoluta. Finalmente, $\mathrm{D}f(a,\ n)$ es absoluta para M, según **ZF**. ☠

Pasemos ahora a definir la operación *conjunto potencia definible,* $\mathscr{D}$. Intuitivamente, $\mathscr{D}(a)$ es el conjunto de subconjuntos de $a$ que son definibles a partir de un número finito de elementos de $a$ por una fórmula relativizada a $a$. Formalmente damos la siguiente,

**Definición₃.** Para cualquier conjunto $a$ definimos,

$$\mathscr{D}(a) = \left\{ x \subseteq a \;\Big/\; \exists n \in \omega\, \exists s \in {}^{n}a\, \exists r \in \mathrm{D}f(a,\ n+1) \left[ x = \left\{ b \in a\ /\ s^\wedge b \in r \right\} \right] \right\}$$

## *OjO:*

**1.** Si $a \in \mathrm{V}$, entonces por el Axioma de Comprensión, $\mathscr{D}(a) \in \mathrm{V}$.

**2.** $\mathscr{D}(a) \subseteq \wp(a)$ (Si se tuviera $\mathbf{ZF_5}$).

**Proposición$_3$**(Esquema)**.** Si $\varphi$ es una $\in$–fórmula, cuyas variables libres son exactamente $v_0, \dots, v_{n-1}, v_n$, entonces

$$\forall a\, \forall v_0, \dots, v_{n-1} \in a \left[ \left\{ v_n \in a \,/\, \varphi^a(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n) \right\} \in \mathscr{D}(a) \right]$$

**Prueba:** Consideremos a $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n)$, un conjunto $a$ y sean $a_0, \dots, a_{n-1} \in a$. Definimos la siguiente relación,

$$r = \left\{ s \in {}^{n+1}a \,/\, \varphi^a(s_0, \dots, s_{n-1}, s_n) \right\}$$

Por la **Proposición$_1$**, tenemos que $r \in \mathrm{D}f(a, n+1)$. Terminamos al ver que,

$$\left\{ v_n \in a \,/\, \varphi^a(a_0, \dots, a_{n-1}, v_n) \right\} = \left\{ b \in a \,/\, \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle {}^\wedge b \in r \right\}$$ ☠

**Proposición$_4$.**

**i).** $\emptyset \in \mathscr{D}(a)$, para cualquier conjunto $a$.

**ii).** $\mathscr{D}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

**Prueba: Ejercicio.** ☠

**Proposición$_5$.** Los subconjuntos finitos de cualquier conjunto, son definibles en dicho conjunto.

Si $b \subseteq a$ y $b$ es finito, entonces $b \in \mathscr{D}(a)$.

**Prueba:** Si $b = \emptyset$, ya lo tenemos. Supongamos que $\emptyset \neq b \subseteq a$ y que $b$ es finito. Así, hay $f$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$ tales que $n + 1 \underset{f}{\sim} b$. Por lo que $b = \{ f(0), \dots, f(n) \}$. Sea

$$\varphi(v_0, \dots, v_n, v_{n+1}) \leftrightharpoons (v_{n+1} \approx v_0) \vee \dots \vee (v_{n+1} \approx v_n)$$

Finalmente, $b = \left\{ y \in a \,/\, \varphi^a\big(f(0), \dots, f(n), y\big) \right\} \in \mathscr{D}(a)$. ☠

**Corolario$_6$.** Si $a$ es finito, entonces $\wp(a) \subseteq \mathscr{D}(a)$ y por tanto $\mathscr{D}(a) = \wp(a)$. Además (sin **AE**), $\left|\mathscr{D}(a)\right| = 2^{|a|} > |a|$

**Proposición$_7$(AE).** Para cualquier conjunto $a$,

**1.** $|a| \leq |\mathscr{D}(a)|$.

**2.** Si $a$ es Infinito, entonces $|\mathscr{D}(a)| \leq |a|$. Y por tanto, $|\mathscr{D}(a)| = |a|$.

**Prueba:**

**1.** Si $b \in a$, entonces $\{b\} = \left\{y \in a \ / \ y = b\right\} \in \mathscr{D}(a)$. Así, $a \precsim \mathscr{D}(a)$.

**2.** $\left|\mathscr{D}(a)\right| \leq \left|\bigcup_{n\in\omega} {}^{n}a\right| \cdot \aleph_0 \underset{a\in \mathrm{INF}}{=} \left|a\right| \cdot \aleph_0 \underset{a\in \mathrm{INF}}{=} \left|a\right|$. ☠

**Proposición₈.** Si $a$ es un conjunto transitivo, entonces $a \subseteq \mathscr{D}(a)$.

**Prueba:** Consideremos la fórmula $v_1 \in v_0$. Por la **Proposición₃** tenemos que,

$$\forall v_0 \in a \left[\left\{y \in a \ / \ y \in v_0\right\} \in \mathscr{D}(a)\right]$$

la cual para un $a$ transitivo, se convierte a $\forall v_o \in a,\ v_0 \in \mathscr{D}(a)$. ☠