Los conjuntos Constructibles.

Aquí estaremos trabajando en todo **ZF**.

Definición$_4$.

I. La funcional L queda definida recursivamente sobre OR como sigue,

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \mathrm{L}\colon \mathrm{OR} & \longrightarrow & \mathrm{V} \\
\textbf{i).} & \mathrm{L}_0 & = & \emptyset \\
\textbf{ii).} & \forall\alpha,\ \mathrm{L}_{\alpha^+} & = & \mathscr{D}(\mathrm{L}_\alpha) \\
\textbf{iii).} & \forall\alpha\in\mathrm{LIM},\ \mathrm{L}_\alpha & = & \bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{L}_\beta
\end{array}
$$

II. $\mathrm{L} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{OR}} \mathrm{L}_\alpha$.

Proposición$_9$.

1. $\forall\alpha\left[\mathrm{L}_\alpha \subseteq \mathrm{R}_\alpha\right]$.

2. $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{BF} \underset{\mathbf{ABF}}{=} \mathrm{V}$

Prueba: La haremos por indución sobre OR.

i). $\mathrm{L}_0 = \emptyset = \mathrm{R}_0$.

ii). $\mathrm{L}_{\alpha^+} = \mathscr{D}(\mathrm{L}_\alpha) \subseteq \wp(\mathrm{L}_\alpha) \underset{\mathbf{HI}}{\subseteq} \wp(\mathrm{R}_\alpha) = \mathrm{R}_{\alpha+1}$

iii). Para $\alpha\in\mathrm{LIM}$ se tiene $\mathrm{L}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{L}_\beta \underset{\mathbf{HI}}{\subseteq} \bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{R}_\beta = \mathrm{R}_\alpha$

Corolario$_{10}$.

1. $\forall n\in\omega,\ \mathrm{L}_n = \mathrm{R}_n$

2. $\mathrm{L}_\omega = \mathrm{R}_\omega$.

Proposición$_{11}$.

1. $\forall n\in\omega,\ \left|\mathrm{L}_n\right| < \left|\mathrm{L}_{n+1}\right| = 2^{|\mathrm{L}_n|} < \aleph_0$

2. $\left|\mathrm{L}_\omega\right| = \aleph_0$

3. $\forall\alpha\geq\omega,\ \left|\mathrm{L}_\alpha\right| = \left|\mathrm{L}_{\alpha^+}\right|$

Proposición$_{12}$. Para cada $\alpha\in\mathrm{OR}$

1. L_α es transitivo.

2. $\forall\xi\leq\alpha\ \left(\mathrm{L}_\xi\subseteq\mathrm{L}_\alpha\right)$.

Prueba: Se hará por inducción sobre OR, en su 1a. forma. Supongamos que **1** y **2** son ciertas para todo ordinal $\beta<\alpha$ y probemos que también lo es para α. Tenemos tres casos. Cuando $\alpha=0$ y cuando $\alpha\in\mathrm{LIM}$ son inmediatos. Veamos el caso en que $\alpha=\beta^+$. Tenemos entonces, por definición, $\mathrm{L}_\alpha = \mathrm{L}_{\beta^+} = \mathscr{D}\left(\mathrm{L}_\beta\right)$ y sabemos que $\mathscr{D}(\mathrm{L}_\beta)\subseteq\wp(\mathrm{L}_\beta)$. Ahora, por **HI**, L_β es transitivo y de la **Prop$_8$**, tenemos que $\mathrm{L}_\beta\subseteq\mathscr{D}\left(\mathrm{L}_\beta\right)$. Con todo esto obtenemos que,

$$\mathrm{L}_\beta\subseteq\mathrm{L}_\alpha\subseteq\wp\left(\mathrm{L}_\beta\right)\subseteq\wp(\mathrm{L}_\alpha)$$

Con lo cual, α cumple tanto **1** como **2**. ☠

Corolario$_{13}$.

1. L es transitivo.
2. $\forall\alpha\ [L_\alpha \in L_{\alpha+1}]$
3. $\forall\alpha,\beta\ [\alpha < \beta \to L_\alpha \in L_\beta]$

Prueba: 1 y **2** son inmediatos de lo ya visto. Para **3**,

$$\text{si } \alpha < \beta, \text{ entonces } \alpha < \alpha^+ \leq \beta \text{ y } L_\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq L_\beta.$$

☠

De la definición de L tenemos que si $x \in L$, entonces el primer α tal que $x \in L_\alpha$ debe ser un ordinal sucesor.

Definición$_5$. Para cada $x \in L$, el L–*Rango de x*, queda definido como sigue,

$$\rho_L(x) = \bigcap \left\{\beta \ / \ x \in L_{\beta+1}\right\}$$

***OjO*:** $\rho_L : L \longrightarrow OR$

Proposición$_{14}$. Para cada $\alpha \in OR$, se tiene que

$$L_\alpha = \left\{x \in L \ / \ \rho_L(x) < \alpha\right\}$$

Prueba: TAREA. ☠

Algunas propiedades de L

Lema$_{15}$. En **ZF - ZF$_5$** tenemos,

1. $ord(x) \leftrightarrow x$ es transitivo & x está ordenado totalmente por $\in$.
2. Hay una fórmula $\varphi(x)$ equivalente a una Δ_0 tal que $\varphi(x) \leftrightarrow ord(x)$.
3. $ord(x)$ es absoluta para cualquier modelo transitivo, según **ZF- ZF$_5$**

Prueba:

1. Inmediata del **ABF**.

2. x es transitivo $\leftrightarrow \forall y \in x\ \forall z \in y\ (z \in x)$ (eq. a una Δ_0) y

x está ordenado totalmente por $\in \leftrightarrow$

$$\forall y \in x\ \forall z \in x\ \forall w \in x\ (y \in z \ \&\ z \in w \to y \in z)\ \&$$
$$\&\ \forall y \in x\ \forall z \in x\ (y \in z \vee y = z \vee z \in y)$$

(eq. a una Δ_0).

3. Inmediata de **2.** ☠

Así, si **ZF - ZF$_5$** $\vdash$ M es transitiva, entonces

i). **ZF - ZF$_5$** $\vdash \forall x \in M\ \left[ord^M(x) \leftrightarrow ord(x)\right]$

ii). **ZF - ZF$_5$** $\vdash OR^M = OR \cap M$.

Recordemos que aquí estamos trabajando en todo **ZF**.

Proposición$_{16}$.

1. $\forall x \in \mathrm{M}\ [ord^{\mathrm{L}}(x) \leftrightarrow ord(x)]$

2. $\mathrm{OR}^{\mathrm{L}} = \mathrm{OR} \cap \mathrm{L}$

3. $\forall \alpha\ [\mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{OR} = \alpha]$

4. $\forall \alpha\ [\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha+1}\ \ \&\ \ \rho_{\mathrm{L}}(\alpha) = \alpha]$

5. $\mathrm{OR} \subseteq \mathrm{L}$ y, por tanto, $\mathrm{OR}^{\mathrm{L}} = \mathrm{OR}$.

Prueba: Puesto que L es una clase transitiva, se tiene **1** y **2**. Veamos los otros.

3. Se hará por inducción sobre OR, en su 2a. forma.

i). $\mathrm{L}_0 \cap \mathrm{OR} = \emptyset \cap \mathrm{OR} = 0$.

ii). Supongamos inductivamente que, $\mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{OR} = \alpha$. Probemos que $\mathrm{L}_{\alpha^+} \cap \mathrm{OR} = \alpha^+$. Puesto que,

$$\alpha = \mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{OR} \subseteq \mathrm{L}_{\alpha^+} \cap \mathrm{OR} \subseteq \mathrm{R}_{\alpha^+} \cap \mathrm{OR} \subseteq \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$$

bastaría probar que $\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha^+} \cap \mathrm{OR}$, es decir $\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha^+}$. Tenemos

$$\alpha \underset{\mathbf{HI}}{=} \mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{OR} = \left\{ x \in \mathrm{L}_\alpha \ / \ ord(x) \right\} \underset{\mathrm{L}_\alpha \text{ transa}}{=} \left\{ v_0 \in \mathrm{L}_\alpha \ / \ ord^{\mathrm{L}_\alpha}(v_0) \right\} \in \mathscr{D}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{L}_{\alpha^+}$$

iii). Supongamos $\alpha \in \mathrm{LIM}$. Así,

$$\mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{OR} = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{L}_\beta \right) \cap \mathrm{OR} = \bigcup_{\beta<\alpha} (\mathrm{L}_\beta \cap \mathrm{OR}) \underset{\mathbf{HI}}{=} \bigcup_{\beta<\alpha} \beta = \alpha$$

4. Se sigue de que $\alpha \in \alpha^+ = \mathrm{L}_{\alpha^+} \cap \mathrm{OR}$. Y

5. Es inmediato de **4.** ☠

Proposición$_{17}$(AE). $\forall \alpha \geq \omega,\ |\mathrm{L}_\alpha| = |\alpha|$.

Prueba: Por inducción sobre OR, en su 2a. forma. Tomemos en cuenta la **Prop$_{11}$** anterior.

i). $|\mathrm{L}_\omega| = \aleph_0 = |\omega|$

ii). $|\mathrm{L}_{\alpha^+}| = |\mathrm{L}_\alpha| \underset{\mathbf{HI}}{=} |\alpha| = |\alpha^+|$

iii). Supongamos que $\alpha \in \mathrm{LIM}$. Puesto que $\alpha = \mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{OR} \subseteq \mathrm{L}_\alpha$, tenemos que $|\alpha| \leq |\mathrm{L}_\alpha|$. Veamos el otro lado.

$$|\mathrm{L}_\alpha| = \left| \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{L}_\beta \right| = \left| \mathrm{L}_\omega \cup \left(\bigcup_{\omega\leq\beta<\alpha} \mathrm{L}_\beta \right) \right| \leq \aleph_0 + \sum_{\omega\leq\beta<\alpha} |\mathrm{L}_\beta| \underset{\mathbf{HI}}{=}$$

$$= \sum_{\omega\leq\beta<\alpha} |\beta| = |\alpha| \cdot \underset{\omega\leq\beta<\alpha}{Sup} |\beta| = |\alpha|$$

☠

TAREA: $|\mathrm{L}_\alpha| = |\mathrm{R}_\alpha|$ syss $\alpha = \beth_\alpha$.

Proposición$_{18}$. La funcional L_α es absoluta para modelos transitivos de **ZF- ZF$_5$**, según **ZF**.

Prueba: Sabemos que $\mathrm{D}f(a,n)$ es absoluta y como $\mathscr{D}$ se puede expresar por composición a partir de $\mathrm{D}f(a,n)$, tenemos que $\mathscr{D}$ es absoluta. Finalmente, L_α está definida por recursión transfinita a partir de absolutas ($\emptyset$, $\mathscr{D}$ y $\bigcup$). ☠