ZF en L

Aquí estaremos trabajando en **ZF** y probaremos que todos los axiomas de **ZF** son verdaderos en L.

Proposición (ZF). L es modelo de **ZF**.

Prueba:

1. $(\mathbf{ZF_1})^{\mathrm{L}}$: (**Ax. Extensionalidad**)$^{\mathrm{L}}$.

   Es inmediato de que L es un Modelo Estandar.

2. $(\mathbf{ZF_2})^{\mathrm{L}}$: (**Ax. del conjunto vacío**)$^{\mathrm{L}}$.

   Pues L es un Modelo Estandar y se tiene que $\emptyset = \mathrm{L}_0 \in \mathrm{L}_1 \subseteq \mathrm{L}$.

3. $(\mathbf{ABF})^{\mathrm{L}}$ **:** (**Ax. de Regularidad**)$^{\mathrm{L}}$.

   Este axioma es verdadero en cualquier clase $\mathrm{M} \neq \emptyset$, con tal de que $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{BF}$ y aquí tenemos que $\mathrm{V} = \mathrm{BF}$.

4. $(\mathbf{ZF_7})^{\mathrm{L}}$: (**Ax. de Infinito**)$^{\mathrm{L}}$.

   Pues L es una modelo transitivo y $\omega \in \mathrm{OR} = \mathrm{OR}^{\mathrm{L}} \subseteq \mathrm{L}$. Además $\omega^{\mathrm{L}} = \omega$.

5. $(\mathbf{ZF_3})^{\mathrm{L}}$: (**Ax. del Par**)$^{\mathrm{L}}$.

   Sean $a,\ b \in \mathrm{L}$. Puesto que L es transitivo, basta ver que $\{a,\ b\} \in \mathrm{L}$. Hay pues, un ordinal α tal que $a,\ b \in \mathrm{L}_\alpha$. Puesto que $\{a,\ b\}$ es un subconjunto finito de L_α, tenemos que

   $$\{a,\ b\} \in \mathscr{D}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{L}_{\alpha^+} \subseteq \mathrm{L}$$

   Incluso $\{a,\ b\}^{\mathrm{L}} = \{a,\ b\}$.

6. $(\mathbf{ZF_4})^{\mathrm{L}}$: (**Ax. de la Unión**)$^{\mathrm{L}}$.

   Como en el caso anterior, basta ver que $\forall x \in \mathrm{L},\ \bigcup x \in \mathrm{L}$. Sea pues $a \in \mathrm{L}$. Hay un ordinal α tal, que $a \subseteq \mathrm{L}_\alpha$. Como L_α es transitivo, entonces $\bigcup a \subseteq \mathrm{L}_\alpha$. Así,

   $$\bigcup a = \left\{\ x \in \mathrm{L}_\alpha \ /\ \exists y\ \big(y \in a\ \&\ x \in y\big)\ \right\} \underset{\Delta_0}{=}$$
   $$\underset{\mathrm{L}_\alpha \text{ transa}}{=} \left\{\ v_1 \in \mathrm{L}_\alpha \ /\ \big(\exists y\ \big(y \in v_0\ \&\ v_1 \in y\big)\big)^{\mathrm{L}_\alpha}(a, v_1)\ \right\} \in \mathscr{D}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{L}_{\alpha^+}$$

   Por tanto $\bigcup a \in \mathrm{L}$.

7. $(\mathbf{ZF_5})^{\mathrm{L}}$: (**Ax. de Potencia**)$^{\mathrm{L}}$.

   Sea $a \in \mathrm{L}$. Veamos que $\wp(a) \cap \mathrm{L} \in \mathrm{L}$. Sea $b = \{x \in \mathrm{L}\ /\ x \subseteq a\}$. Ahora bien, para cada $x \in b$ sea $\alpha_x = \rho_{\mathrm{L}}(x) + 1$ (así, $x \in \mathrm{L}_{\alpha_x}$) y sea $\alpha = \bigcup\{\alpha_x\ /\ x \in b\}$ ($\alpha \in \mathrm{V}$ por el esquema de comprensión y el axioma de la unión). Así tenemos que para cada $x \in b$, se tiene $x \in \mathrm{L}_\alpha$. Por lo que,

   $$b = \left\{x \in \mathrm{L}_\alpha\ /\ x \subseteq a\right\} = \left\{v_1 \in \mathrm{L}_\alpha\ /\ (v_1 \subseteq v_0)^{\mathrm{L}_\alpha}(a, v_1)\right\} \in \mathscr{D}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{L}_{\alpha^+} \subseteq \mathrm{L}$$

8. $(\mathbf{ZF_6})^{\mathrm{L}}$: $\big($**Esq. Ax. de Comprensión**$\big)^{\mathrm{L}}$

Recordemos que para tener que $(\mathbf{ZF_6})^{\mathrm{L}}$ es suficiente con tener que para cada $\in$–fórmula $\varphi(w, w_1, \ldots, w_n)$ con todas sus variables libres como se muestran, se tiene que

$$\forall x, w_1, \ldots, w_n \in \mathrm{L}\left[\ \left\{ w \in x \,/\, \varphi^{\mathrm{L}}(w, x, w_1, \ldots, w_n)\right\} \in \mathrm{L}\ \right]$$

Puesto que nuestra definición de $\mathrm{L}_{\alpha+1} = \mathrm{D}(\mathrm{L}_\alpha)$ y la definición de $\mathrm{D}(\mathrm{L}_\alpha)$ involucra relativización a L_α y no a L, tendremos que usar una herramienta adicional, los Teoremas de Reflexión. (Pendiente.)

9. $(\mathbf{ZF_8})^{\mathrm{L}}$: $\big($**Esq. Ax. de Sustitución**$\big)^{\mathrm{L}}$

Para probar que $(\mathbf{ZF_8})^{\mathrm{L}}$, puesto que ya tenemos que $(\mathbf{ZF_6})^{\mathrm{L}}$, es suficiente con mostrar que para cada $\in$–fórmula $\varphi\left(x, y, a, w_1, \ldots, w_n\right)$ con todas sus variables libres como se muestran y cada $a, w_1, \ldots, w_n \in \mathrm{L}$, si se tiene que

$$\forall x \in a\ \exists! y \in \mathrm{L}\ \varphi^{\mathrm{L}}\left(x, y, a, w_1, \ldots, w_n\right) \tag{$*$}$$

hay que concluir que

$$\exists b \in \mathrm{L}\left[\left\{ y \,/\, \exists x \in a\ \varphi^{\mathrm{L}}\left(x, y, a, w_1, \ldots, w_n\right)\right\} \subseteq b\right]$$

Supongamos pues $(*)$ y sea

$$\alpha = \bigcup\left\{\rho_{\mathrm{L}}\left(y\right) + 1 \,/\, \exists x \in a\ \varphi^{\mathrm{L}}\left(x, y, a, w_1, \ldots, w_n\right)\right\}$$

($\alpha \in \mathrm{V}$, por Sustitución y Ax. Unió). Sea $b = \mathrm{L}_\alpha$. Tenemos que $b = \mathrm{L}_\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha+1} \subseteq \mathrm{L}$, es decir, $b \in \mathrm{L}$ y además,

$$\left\{ y \,/\, \exists x \in a\ \varphi^{\mathrm{L}}\left(x, y, a, w_1, \ldots, w_n\right)\right\} \subseteq b$$

☠

$\left(\mathbf{ZF_6}\right)^{\mathrm{L}}$

Para la prueba necesitaremos el **T**eorema de **R**eflexión, que a la letra dice,

Si Z una clase no–vacía y $Z\_ : \mathrm{OR} \longrightarrow V$ son tales, que

i). $\alpha < \beta \to Z_\alpha \subseteq Z_\beta$.

ii). $\beta \in \mathrm{LIM} \to Z_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} Z_\alpha$. Y

iii). $Z = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{OR}} Z_\alpha$.

Entonces, para cualesquiera $\in$–fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, se tiene que

$$\forall\alpha\ \exists\beta > \alpha \left[\ \beta \in \mathrm{LIM}\ \&\ Z_\beta \neq \emptyset\ \&\ \varphi_1, \ldots, \varphi_l \text{ son absolutas } Z_\beta,\ Z\ \right]$$

Sabemos que L y L_ cumplen con las hipótesis del **TR**.

Prueba de $(\mathbf{ZF_6})^{\mathrm{L}}$:

Sean $\varphi(w, x, w_1, \ldots, w_n)$ una $\in$–fórmula, con todas sus variables libres como se muestran, y fijemos a $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{L}$. Probemos que

$$\left\{ w \in a \ /\ \varphi^{\mathrm{L}}(w, a, b_1, \ldots, b_n) \right\} \in \mathrm{L}$$

Tomemos un $\alpha \in \mathrm{OR}$ tal, que $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{L}_\alpha$. Por el **TR**, hay un $\beta > \alpha$ tal que φ es absoluta L_β, L. Por tanto tenemos que $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{L}_\beta$ y

$$\forall\, w \in \mathrm{L}_\beta \left[\varphi^{\mathrm{L}_\beta}(w, a, b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{L}}(w, a, b_1, \ldots, b_n)\right]$$

Y de esto junto con la transitividad de L_β obtenemos,

$$\left\{ w \in a \ /\ \varphi^{\mathrm{L}}(w, a, b_1, \ldots, b_n) \right\} = \left\{ w \in \mathrm{L}_\beta \ /\ \psi^{\mathrm{L}_\beta}(w, a, b_1, \ldots, b_n) \right\}$$

donde ψ es la fórmula $\left(w \in a\ \&\ \varphi\right)$. Este último conjunto es un elemento de $\mathrm{D}\left(\mathrm{L}_\beta\right) = \mathrm{L}_{\beta+1} \subseteq \mathrm{L}$.