Teorema de Reflexión

Aquí estaremos trabajando en $\mathbf{ZF}^-$.

Notación. De ahora en adelante, salvo que se diga otra cosa si escribimos $\varphi\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ quiere decir que las variables líbres de la $\in$–fórmula φ son exactamente $y_1,\ldots,y_n$. En algunas ocasiones escribiremos $\overrightarrow{y}$ en lugar de $y_1,\ldots,y_n$.

Definición. Una lista finita de $\in$–fórmulas se dice que es *Cerrada bajo Subfórmulas* syss toda subfórmula de una fórmula de la lista está en la lista (y ninguna de la lista usa el cuantificador universal, $\forall$).

Así, si $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ es cerrada bajo subfórmulas, entonces para cada $i\in n$, se tiene que φ_i o es atómica (*ie.* de la forma $(x=y)$ o $(x\in y)$) o es una negación, $(\neg\varphi_j)$ para algún $j\in n$, o una conjunción, $(\varphi_j\ \&\ \varphi_k)$ con $j,k\in n$ o es una cuantificación existencial, $\exists x\varphi_j$ para algún $j\in n$.

Puesto que una fórmula es una expresión finita, de hecho, una sucesión finita de símbolos, tiene un número finito de subfórmulas; por consiguiente, toda lista finita de fórmulas se pude extender a otra lista –finita– que sea cerrada bajo subfórmulas. En el caso en que en alguna fórmula aparezca un $\forall$, habrá que cambiarlo por $\neg\exists\neg$, para obtener una lógicamente equivalente.

Necesitaremos el siguiente

Lema$_1$ (Test de Vaught–Tarski).

Sean M y N clases, con $\emptyset\neq \mathrm{M}\subseteq \mathrm{N}$ y sean $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ una lista de $\in$–fórmulas cerradas bajo subfórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones,

(a) $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ son absolutas M, N

(b) Cada vez que φ_i sea de la forma $\exists x\ \varphi_j\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$, se tiene que

$$\forall y_1,\ldots,y_n\in\mathrm{M}\left[\exists x\in\mathrm{N}\ \varphi_j^{\mathrm{N}}\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)\to\exists x\in\mathrm{M}\ \varphi_j^{\mathrm{N}}\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)\right]$$

Prueba: Probaremos ambas implicaciones en forma directa.

(a) ⇒ (b) $\Big]$ Supongamos que $\varphi_i\left(y_1,\ldots,y_n\right)\leftrightharpoons\exists x\ \varphi_j\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$. Ahora, fijemos $y_1,\ldots,y_n\in\mathrm{M}$ y supongamos que $\exists x\in\mathrm{N}\ \varphi_j^{\mathrm{N}}\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$, es decir que $\varphi_i^{\mathrm{N}}\left(y_1,\ldots,y_n\right)$. Por **(a)**, tenemos que $\varphi_i\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ es absoluta M, N y de aquí obtenemos que $\varphi_i^{\mathrm{M}}\left(y_1,\ldots,y_n\right)$, es decir,

$$\exists x\in\mathrm{M}\ \varphi_j^{\mathrm{M}}\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)\qquad(*)$$

Por otro lado, también por **(a)**, tenemos que $\varphi_j\left(x,y_1,\ldots y_n\right)$ es absoluta M, N, es decir,

$$\forall x\in\mathrm{M}\ \left[\varphi_j^{\mathrm{M}}\left(x,y_1,\ldots y_n\right)\ \leftrightarrow\ \varphi_j^{\mathrm{N}}\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)\right]$$

De esto último y de $(*)$, concluimos que $\exists x \in \mathrm{M}\ \varphi_j^{\mathrm{N}}(x, y_1, \ldots y_n)$.

(b) ⇒ (a) $\big]$ Probaremos algo más general, que toda fórmula tiene la propiedad: para toda φ, si φ cumple **(b)**, entonces φ es absoluta M, N. Y esto se hará por Inducción sobre la formación de $\in$–fórmulas.

La base de la inducción, para atómicas, es trivial, son absolutas M, N y en el paso inductivo los casos de los conectivos & y $\neg$ son inmediados de la hipótesis inductiva. Veamos el caso de la cuantificación existencial.

Supongamos inductivamente que $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ es absoluta M, N y probemos que $\exists x \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ también lo es. Fijemos $y_1, \ldots, y_n \in$ M, tenemos

$$\begin{array}{rcll}
\left(\exists x \varphi\left(x, \overrightarrow{y}\right)\right)^{\mathrm{M}} & \leftrightarrow & \exists x \in \mathrm{M}\ \varphi^{\mathrm{M}}\left(x, \overrightarrow{y}\right) & \\
& \leftrightarrow & \exists x \in \mathrm{M}\ \varphi^{\mathrm{N}}\left(x, \overrightarrow{y}\right) & \textbf{H.I.} \\
& \leftrightarrow & \exists x \in \mathrm{N}\ \varphi^{\mathrm{N}}\left(x, \overrightarrow{y}\right) & \rightarrow)\ \mathrm{M} \subseteq \mathrm{N};\ \leftarrow)\ \textbf{(b)} \\
& \leftrightarrow & \left(\exists x \varphi\left(x, \overrightarrow{y}\right)\right)^{\mathrm{N}} &
\end{array}$$

☠

Pasemos al **Teorema de Reflexión**.

Proposición₂.

Sean Z una clase no–vacía y $\mathrm{Z}\_ : \mathrm{OR} \longrightarrow \mathrm{V}$ tales, que

i). $\alpha < \beta \rightarrow \mathrm{Z}_\alpha \subseteq \mathrm{Z}_\beta$.

ii). $\beta \in \mathrm{LIM} \rightarrow \mathrm{Z}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathrm{Z}_\alpha$. Y

iii). $\mathrm{Z} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{OR}} \mathrm{Z}_\alpha$.

Así, para cualesquiera $\in$–fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, se tiene que

$$\forall\alpha\, \exists\beta > \alpha \left[\ \beta \in \mathrm{LIM}\ \&\ \mathrm{Z}_\beta \neq \emptyset\ \&\ \varphi_1, \ldots, \varphi_l \text{ son absolutas } \mathrm{Z}_\beta,\ \mathrm{Z}\ \right]$$

Algunos comentarios son necesarios.

1. Se pide que Z sea una clase no–vacía, pero no que sea una clase propia. Si $\mathrm{Z} \in \mathrm{V}$, entonces $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_\xi$, para un ξ lo suficientemente grande y el resultado es trivial.

2. No se está exigiendo que para todo α, $\mathrm{Z}_\alpha \neq \emptyset$ ya que para algún ξ, lo suficientemente grande, se tiene que todo $\beta > \xi$, $\mathrm{Z}_\beta \neq \emptyset$.

3. Para la prueba usaremos el Test de Vaught–Tarski donde $\mathrm{N} = \mathrm{Z}$ y encontraremos un ordinal β tal que $\mathrm{M} = \mathrm{Z}_\beta$ el cual cumpla **(b)**. Es decir, un $\beta > \alpha$ tal que Z_β sea cerrado bajo los existenciales de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$.

Prueba: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ es una lista cerrada bajo subfórmulas.

Para cada fórmula $\varphi\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ de la forma $\exists x\ \psi\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$, definimos la funcional G_φ como sigue,

$$G_\varphi : Z^n \longrightarrow OR$$

$$\forall \overrightarrow{y} \in Z^n,\ G_\varphi\left(\overrightarrow{y}\right) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \neg\varphi^Z\left(\overrightarrow{y}\right) \\ \bigcap\left\{\eta \in OR \ / \ \exists x \in Z_\eta\ \psi^Z\left(x,\overrightarrow{y}\right)\right\} & \text{Si } \varphi^Z\left(\overrightarrow{y}\right) \end{cases}$$

Observemos que si $\overrightarrow{y} \in Z^n$ es tal, que $\varphi^Z\left(\overrightarrow{y}\right)$, entonces hay un $x \in Z_{G_\varphi\left(\overrightarrow{y}\right)}$ tal, que $\psi^Z\left(x,\overrightarrow{y}\right)$.

Ahora, para cada fórmula $\varphi\left(y_1,\ldots,y_n\right)$, definimos la funcional F_φ de la siguiente manera,

$$F_\varphi : OR \longrightarrow OR$$

$$\forall \xi,\ F_\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \varphi\left(\overrightarrow{y}\right) \text{ no es existencial} \\ \bigcup\left\{G_\varphi\left(\overrightarrow{y}\right) \ / \ \overrightarrow{y} \in Z^n_\xi\right\} & \text{Si } \varphi\left(\overrightarrow{y}\right) \text{ es existencial} \end{cases}$$

OjO:

(1) La funcional F_φ está bien definida gracias al Axioma de Sustitución — $G_{\varphi_i}\left[Z^n_\xi\right] \in V$.

(2) $\xi_1 < \xi_2 \to F_\varphi(\xi_1) \leq F_\varphi(\xi_2)$. Pues $Z_{\xi_1} \subseteq Z_{\xi_2}$.

Afirmación. Si $\beta \in LIM$ y para cada $i \in \{1,\ldots,l\}$, se tiene que $\forall \xi < \beta\ \left[F_{\varphi_i}(\xi)\ < \beta\right]$, entonces $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ son absolutas Z_β, Z

Aquí usaremos el Test de Vaught–Tarski. Supongamos que φ_i es un existencial, digamos $\exists x\ \varphi_j\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$. Fijemos $y_1,\ldots,y_n \in Z_\beta$ y supongamos que $\exists x \in Z\ \varphi_j^Z\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$, demostremos que $\exists x \in Z_\beta\ \varphi_j^Z\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$. Puesto que $\beta \in LIM$ hay un $\xi_0 < \beta$ tal que $y_1,\ldots,y_n \in Z_{\xi_0} \subseteq Z_\beta$, pero entonces $0 \neq G_{\varphi_i}\left(y_1,\ldots,y_n\right) \leq F_{\varphi_i}(\xi_0)$ con $x \in Z_{F_{\varphi_i}(\xi_0)}$. Finalmente, $Z_{F_{\varphi_i}(\xi_0)} \subseteq Z_\beta$, pues $F_{\varphi_i}(\xi_0) < \beta$. Así, $\exists x \in Z_\beta\ \varphi_j^Z\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$.

Sea α un ordinal arbitrario, encontremos un ordinal $\beta > \alpha$, tal que $L_\beta \neq \emptyset$ y cumpla con las condiciones exigidas en la afirmación anterior. Sea ζ_0 el primero de todos los ordinales ζ, para los cuales $L_\zeta \neq \emptyset$. Ahora, definimos recursivamente la sucesión $\{\beta_p\}_{p\in\omega}$ como sigue,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha \cup \zeta_0 \\ \forall p \in \omega,\ \beta_{p+1} &= max\left\{\beta_p + 1,\ F_{\varphi_1}\left(\beta_p\right),\ldots,\ F_{\varphi_l}\left(\beta_p\right)\right\} \end{aligned}$$

OjO (3) : $\alpha \leq \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots$

Ahora, si $\beta = Sup\{\beta_p \ / \ p \in \omega\}$ entonces β es uno que nos sirve. Tenemos de **(3)**, que $\beta \in \mathrm{LIM}$, $\beta > \alpha$ y $L_\beta \neq \emptyset$. Finalmente, si $\xi < \beta$, hay un $p \in \omega$ tal, que $\xi < \beta_p$ y para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$, se tiene que

$$F_{\varphi_i}(\xi) \underset{\textbf{(2)}}{\leq} F_{\varphi_i}(\beta_p) \underset{\mathrm{Def}\,\beta_{p+1}}{\leq} \beta_{p+1} \underset{\textbf{(3)}}{<} \beta$$

☠

Al suponer el **ABF**, podemos usar la proposición anterior con Z = BF = V y Z_ = R_, y obtener el importante resultado siguiente,

Corolario$_3$ (ZF). Para cualquier lista finita de $\in$–fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ se tiene que,

$$\forall\alpha\ \exists\beta > \alpha\ \left[\ \varphi_1, \ldots, \varphi_l \text{ son absolutas para } R_\beta\ \right]$$