El Axioma de Constructibilidad

¿ Todo conjunto es construible ?

Trivialmente $L \subseteq V$, pero ¿ $V \subseteq L$? es decir ¿ $\forall x\ [x \in L]$? o, mejor dicho, ¿ $\forall x\, \exists\alpha\ [x \in L_\alpha]$?
Sabemos que,

1. $\forall\alpha\ [L_\alpha \subseteq R_\alpha]$

2. (**AE**) Para $\alpha \geq \omega$, $|L_\alpha| = |L_{\alpha+1}|$, mientras que $|R_\alpha| = |R_{\alpha+1}| = 2^{|R_\alpha|}$. Por lo que $L_{\alpha+1} \subsetneq R_{\alpha+1}$.

3. (**AE**) Hay ordinales α, a saber aquellos $\alpha = \beth_\alpha$, $|L_\alpha| = |R_\alpha|$.

Aunque el enunciado $\forall x\, \exists\alpha\ [x \in L_\alpha]$ parece improbable, este es consistente con **ZF**, como veremos más adelante. También es consistente, con **ZF**, la negación, pero esto queda fuera de nuestros propósitos. Por lo pronto,

Definición. El *Axioma de Constructibilidad* es el $\in$–enunciado,

$$\forall x\, \exists\alpha\ [x \in L_\alpha]$$

abreviado como, $V = L$.

Probaremos más adelante que es consistente **ZF** + $V = L$, mostrando que L es un modelo de esta teoría. Sabemos ahora que lo es de **ZF**, veremos que también lo es de $V = L$. El hecho de que L sea modelo de $V = L$ no es trivial, como que $L = L$ [1]. Es trivialmente cierto que $\forall x \in L\, \exists\alpha\ [x \in L_\alpha]$, pero $(V = L)^L$ dice $\forall x \in L\, \exists\alpha \in L\ [\ (x \in L_\alpha)^L\ ]$ y para tener esto último, habrá que justificarlo.

Se pueden dar modelos estandar, M, de **ZF** es decir **ZF** $\vdash$ $(\mathbf{ZF})^M$ tales que **ZF** $\nvdash$ $(V = M)^M$. Un ejemplo es M = HOD (el universo de los conjuntos Hereditariamente Definibles con Ordinales).

Recordemos[2] que la funcional L_ es absoluta para modelos transitivos de $\mathbf{ZF} - \mathbf{ZF_5}$. Así, si M es un modelo transitivo de **ZF**, se tiene que $\forall\alpha \in OR^M,\ L_\alpha^M = L_\alpha$.

Hecho este comentario, podemos pasar a ver que L es un modelo del axioma de constructibilidad.

Proposición$_2$. $(V = L)^L$.

Prueba: Tenemos que probar que,

$$\forall x \in L\, \exists\alpha \in L\ \left[\ \left(x \in L_\alpha\right)^L\ \right]$$

Fijemos un $x \in L$. Hay un $\alpha \in OR$ tal, que $x \in L_\alpha$. Ahora bien, puesto que $OR = OR^L \subseteq L$, tenemos que $\alpha \in L$. Finalmente, como L es un modelo transitivo de **ZF**, por el comentario anterior tenemos, $\left(x \in L_\alpha\right)^L$. ☠

Podemos ahora enunciar los siguientes resultados.

Corolario$_3$.

1). $\mathbf{ZF} \vdash \left(\mathbf{ZF} + V = L\right)^L$

2). $CON(\mathbf{ZF}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF} + V = L)$

3). $CON(\mathbf{ZF}) \Rightarrow\ \mathbf{ZF} \nvdash\ V \neq L$

---

[1] Es cierto que $V^L = L$, pero ¿ L^L ?

[2] Ver **Prop$_{18}$** del capítulo anterior.

Para finalizar esta sección, veamos otra consecuencia de la absolutez de la funcional L_.

Proposición$_4$**.** Sea M un modelo transitivo de **ZF - ZF**$_5$. Si M es una clase propia o equivalentemente, $\mathrm{OR} \subseteq \mathrm{M}$, entonces $\mathrm{L} = \mathrm{L}^{\mathrm{M}} \subseteq \mathrm{M}$.

Prueba: Veamos primero la equivalencia de las hipótesis. Un lado es trivial, veamos el otro. Sea $\alpha \in \mathrm{OR}$, puesto que al ser M una clase propia, se tiene que $\mathrm{M} \nsubseteq \mathrm{R}_\alpha$ y entonces hay un $x \in \mathrm{M}$ tal que $\rho(x) \geq \alpha$. Pero entonces, gracias a la absolutez del rango, tenemos que $\alpha \leq \rho(x) = \rho^{\mathrm{M}}(x) \in \mathrm{M}$ y como M es transitiva, $\alpha \in \mathrm{M}$. También concluimos que $\mathrm{OR}^{\mathrm{M}} = \mathrm{OR}$.
Finalmente tenemos,

$$\mathrm{L}^{\mathrm{M}} = \left\{ x \in \mathrm{M} \,/\, \left(\exists\alpha \ (x \in \mathrm{L}_\alpha)\right)^{\mathrm{M}} \right\} = \left\{ x \in \mathrm{M} \,/\, \exists\alpha \in \mathrm{M} \left(x \in \mathrm{L}_\alpha\right)^{\mathrm{M}} \right\} =$$

$$\underset{\mathrm{OR}^{\mathrm{M}}=\mathrm{OR}}{=} \left\{ x \in \mathrm{M} \,/\, \exists\alpha \ \left(x \in \mathrm{L}_\alpha^{\mathrm{M}}\right) \right\} \underset{\mathrm{L}_\alpha^{\mathrm{M}}=\mathrm{L}_\alpha}{=} \left\{ x \,/\, \exists\alpha \ (x \in \mathrm{L}_\alpha) \right\} = \mathrm{L}$$

Por tanto, $\mathrm{L} = \mathrm{L}^{\mathrm{M}} \subseteq \mathrm{M}$. ☠