El Axioma de Elección en L

Trabajando en **ZF**, veremos que el **AE** es verdadero en L, O bien, L es un modelo del Axioma de Elección, según **ZF**. Dicho de manera formal, probaremos que,

$$\mathbf{ZF} \vdash \mathbf{AE}^{\mathrm{L}}$$

Obteniendo así, la consistencia relativa del Axioma de Elección con el resto de los axiomas de **ZF**.

Tomaremos una versión equivalente al **AE**, el Teorema del Buen Orden (**TBO**). Puesto que "r bien ordena a x" es absoluta [1] para modelos de **ZF**, basta probar, en **ZF**, que

$$\forall x \in \mathrm{L}\, \exists r \in \mathrm{L}\, (r \text{ bien ordena a } x)$$

Ahora bien, si $x \in \mathrm{L}$, entonces $x \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathrm{OR}$. Si logramos bien ordenar a L_α, digamos por $<_\alpha$, tendríamos que x es bien ordenable –con $<_\alpha \cap (x \times x)$. Una pregunta imprescindible es, ¿ $<_\alpha \in \mathrm{L}$? La respuesta no es muy sencilla, como veremos no es posible asegurarlo y nos vamos a ver obligados a usar una hipótesis adicional, el axioma de constructibilidad, $\mathrm{V} = \mathrm{L}$.

La idea es pues, definir un buen orden para L_α, para cada ordinal α. Puesto que la jerarquía de los constructibles es acumulativa, nuestros buenos órdenes podrían bien ser uno extensión de otro, es decir, si $\alpha < \beta$, entonces $<_\alpha \subseteq <_\beta$. Esto se lograría con una definición recursiva, una definición recursiva sobre OR en su 2a. forma.

La base es obvia, $<_0 = \emptyset$ y para el paso límite, sería cuestión de referirlos a los niveles anteriores. El paso crítico es el sucesor; definir un buen orden, $<_{\alpha+1}$, en $\mathrm{L}_{\alpha+1} = \mathscr{D}(\mathrm{L}_\alpha)$, teniendo a la mano el buen órden $<_\alpha$ de L_α. Y este paso lo podemos atacar en forma general, es decir, si un conjunto a es bien ordenable, entonces $\mathscr{D}(a)$ también es bien ordenable.

Consideremos un conjunto arbitrario a y supongamos que $\langle a, <_a \rangle \in \mathrm{COBO}$. Para intentar dar un buen orden a $\mathscr{D}(a)$, recordemos que la definición de $\mathscr{D}(a)$, nos remite a $\mathrm{D}f(a, n)$ y ésta a su vez a la de $\mathrm{D}f'(k, a, n)$. Daremos una enumeración (con repeticiones) de $\mathrm{D}f(a, n)$ para cualquier conjunto a y cualquier natural n.

Definición$_1$. Sea a un conjunto cualquiera. Definimos recursivamente, sobre $m \in \omega$ y simultáneamente sobre todo $n \in \omega$, la siguiente funcional,

$$\forall m \in \omega\ \forall n \in \omega\ \mathrm{E}n(m, a, n)$$

como sigue,

$$\mathrm{E}n(m, a, n) = \begin{cases} \mathrm{D}iag_\in(a, n, i, j) & \text{si } m = 2^i \cdot 3^j \\ \mathrm{D}iag_=(a, n, i, j) & \text{si } m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5 \\ {}^n a \setminus \mathrm{E}n(i, a, n) & \text{si } m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2 \\ \mathrm{E}n(i, a, n) \cap \mathrm{E}n(j, a, n) & \text{si } m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3 \\ \mathrm{P}roy(a, \mathrm{E}n(i, a, n+1), n) & \text{si } m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4 \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

[1] Ver la **Prop$_7$** del cap. Absolutez - B y tener en cuenta que aquí tenemos el **ABF**, es decir, V = BF.

Proposición₁. $$\forall n \in \omega \, \forall a \left[\mathrm{D}f\,(a,\ n) = \left\{ \mathrm{E}n\,(m,\, a,\, n)\ /\ m \in \omega \right\} \right]$$

Prueba: Sugerencia:

$\supseteq \big]$ Probar por Inducción sobre $m \in \omega$ que,

$$\forall n \in \omega \ \mathrm{E}n\,(m,\, a,\, n) \in \mathrm{D}f\,(a,\, n).$$

$\subseteq \big]$ Puesto que si $r \in \mathrm{D}f\,(a,\, n) = \bigcup_{k\in\omega} \mathrm{D}f'\,(k,\, a,\, n)$, tenemos que hay un $k \in \omega$ tal que $r \in \mathrm{D}f'\,(k,\ a,\ n)$.

Probar por Inducción sobre $k \in \omega$ que,

$$\forall n \in \omega \left[\mathrm{D}f'\,(k,\, a,\, n) \subseteq \left\{ \mathrm{E}n\,(m,\, a,\, n)\ /\ m \in \omega \right\} \right]$$

☠

Corolario₂. $\left|\mathrm{D}f\,(a,\, n)\right| \le \aleph_0$

Corolario₃.

$$\mathrm{MD}\,(a) = \left\{ x \subseteq a\ /\ \exists n \in \omega\ \exists s \in {}^{n}a\ \exists m \in \omega \left[x = \left\{ y \in a\ /\ s^\wedge y \in \mathrm{E}n\,(m,\, a,\, n+1) \right\} \right] \right\}$$

Con esto ya estamos preparados para atacar el buen ordenamiento de $\mathscr{D}\,(a)$.

Si tomamos en cuenta el último corolario, nos falta tener un órden en ${}^{n}a$. Usaremos el orden lexicográfico, el cual lo simbolizaremos por $\lhd_a^n$. Así, si $s,\ t \in {}^{n}a$ se tiene que,

$$s \lhd_a^n t \quad \text{syss} \quad \exists k < n \left[s \upharpoonright k = t \upharpoonright k \ \ \&\ \ s_k <_a t_k \right]$$

Obsérvese que $\lhd_a^n$ bien ordena a ${}^{n}a$. Ahora, para cada $x \in \mathscr{D}(a)$ sean,

- n_x, el primer natural n tal que
$$\exists s \in {}^{n}\mathrm{L}_\alpha\ \exists m \in \omega \left[x = \left\{ y \in \mathrm{L}_\alpha\ /\ s^\wedge y \in \mathrm{E}n\,(m,\, a,\, n+1) \right\} \right]$$
- s_x, el $\lhd_a^{n_x}$–menor de las sucesiones s de longitud n_x –$s \in {}^{n_x}\mathrm{L}_\alpha$– tal, que
$$\exists m \in \omega \left[x = \left\{ y \in \mathrm{L}_\alpha\ /\ s^\wedge y \in \mathrm{E}n\,(m,\, a,\, n_x+1) \right\} \right]$$
- m_x, el mínimo de los naturales m, con la propiedad
$$x = \left\{ y \in \mathrm{L}_\alpha\ /\ s_x{}^\wedge y \in \mathrm{E}n\,(m,\, a,\, n_x+1) \right\}$$

Formalizemos todo lo que hemos hecho.

Definición₂. Sea $<_a$ un buen orden para a. Para $x,\ y \in \mathscr{D}(a)$,

$$x <_{\mathscr{D}(a)} y \quad \text{syss} \quad \begin{cases} \left[\ n_x \in n_y\ \right] & \vee \\ \left[\left(\ n_x = n_y\ \right)\ \&\ \left(\ s_x \lhd_a^{n_x} s_y\ \right) \right] & \vee \\ \left[\left(\ n_x = n_y\ \right)\ \&\ \left(\ s_x = s_y\ \right)\ \&\ \left(\ m_x \in m_y\ \right) \right] \end{cases}$$

Proposición₂. Si $<_a$ bien ordena al conjunto a, entonces $<_{\mathscr{D}(a)}$ bien ordena a $\mathscr{D}\,(a)$.

Con esto ya podemos dar con todo rigor la definición recursiva de $<_\alpha \subseteq \mathrm{L}_\alpha \times \mathrm{L}_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathrm{OR}$.

Definición$_3$. Sean x y y conjuntos arbitrarios.

I. $<_0 = \varnothing$

II. Supongamos definido $<_\alpha$. Definimos,

$$x <_{\alpha+1} y \ \text{ syss } \ x,\ y \in L_{\alpha+1} \ \& \begin{cases} \left[x,\ y \in L_\alpha \ \& \ \left(x <_\alpha y\right)\right] & \vee \\ \left[x \in L_\alpha \ \& \ y \notin L_\alpha\right] & \vee \\ \left[x,\ y \notin L_\alpha \ \& \ \left(x <_{\mathscr{D}(L_\alpha)} y\right)\right] \end{cases}$$

III. Sea $\alpha \in \text{LIM}$ y supongamos definido $<_\beta$ para todo ordinal $\beta < \alpha$. Definimos,

$$x <_\alpha y \text{ syss } x,\ y \in L_\alpha \ \& \begin{cases} \rho_L(x) < \rho_L(y) \\ \vee \\ \rho_L(x) = \rho_L(y) \ \& \ \left(x <_{\rho_L(x)+1} y\right) \end{cases}$$

Podemos ahora consolidar todo lo anterior.

Proposición$_5$ (ZF).

1. $\forall \alpha \ \langle L_\alpha, <_\alpha \rangle \in \text{COBO}$.
2. $\forall x \in L \ (x$ es bien ordenable).

Proposición$_6$ (ZF).

1. $V = L \rightarrow \forall x \ (x$ es bien ordenable)
2. $V = L \rightarrow$ **TBO**
3. $V = L \rightarrow$ **AE**

Corolario$_7$

1. **ZF** + $V = L \vdash$ **AE.**
2. **ZF** $\vdash$ **AE**^{L}

Prueba: El **2** se obtiene de **1**, tomando en cuenta que L es un modelo de todo **ZF** + V = L, según **ZF**.

☠

Corolario$_8$ (Gödel 1939).

1. **ZF** $\vdash (\mathbf{ZF} + \mathbf{AE})^L$
2. CON(**ZF**) $\Rightarrow$ CON(**ZF** + **AE**).
3. CON(**ZF**) $\Rightarrow$ **ZF** $\nvdash \neg$**AE**
4. **ZF** $\vdash (\mathbf{ZF} + \mathbf{AE} + V = L)^L$.
5. CON(**ZF**) $\Rightarrow$ CON(**ZF** + **AE** + V = L)
6. CON(**ZF**) $\Rightarrow$ **ZF** + **AE** $\nvdash V \neq L$

Un par de comentarios antes de terminar.

Corolario$_9$. Si para $x,\ y \in \mathrm{L}$ ponemos que

$$x <_{\mathrm{L}} y \qquad \text{syss} \qquad \exists\alpha\left[x <_\alpha y\right]$$

entonces $<_{\mathrm{L}}$ Bien Ordena a L.

Es decir **la clase** de todos los conjuntos constructibles es bien ordenable. Este resultado, bajo la suposición del Axioma de Constructibilidad, V = L, es una forma fuerte del Axioma de Elección, llamada *Elección Global,* “El Universo es Bien Ordenable”.

Podemos decir algo más de este órden.

Corolario$_{10}$.

1. Para $x,\ y \in \mathrm{L}$,

$$x <_{\mathrm{L}} y \quad \text{syss} \quad \rho_{\mathrm{L}}(x) < \rho_{\mathrm{L}}(y) \vee \left[\rho_{\mathrm{L}}(x) = \rho_{\mathrm{L}}(y) \ \ \& \ \ \left(x <_{\rho_{\mathrm{L}}(x)+1} y\right)\right]$$

2. Cada L_α es un segmento inicial de L en el orden $<_{\mathrm{L}}$.

3. El orden $<_{\mathrm{L}}$, restrigido a L_α es, $<_\alpha$.