En estas notas solo haremos la prueba del teorema de la enumeración mediante recursión. Queda como tarea ver la otra prueba en los libros.

Previos

Observaciones. En cualquier buen orden $\langle a, < \rangle$, los $<$–segmentos iniciales tienen supremo, o bien, son ideales principales. Es decir, si $s \subset a$ es un segmento inicial, entonces s se puede ver como

$$\{x \in a : x < u\}$$

para alguna $u \in a$.

La prueba es exactamente la misma que cuando probamos (el semestre pasado) que los buenos ordenes son completos. De hecho, esta prueba no requiere que a sea conjunto, y solo necesita que s sea un subconjunto acotado superiormente de a. La observación ¿sigue siendo válida cuando hablamos de una relacional que bien ordene a una clase?

Lema 1. En cualquier buen orden $\langle a, < \rangle$, Cualquier automorfismo avienta los puntos "hacia arriba" Es decir; Si $f : a \to a$ es un isomorfismo, entonces $\forall x \in a \left(x \leq f(x)\right)$.

Con minimalidad. Supongamos que no es así y tomemos

$$m = \min_{<} \{x \in a : f(x) < x\}$$

Así las cosas $f(m) < m$. Como f es creciente (de hecho es lo único que necesitamos, así que podemos reformular el lema), se tiene que $f(f(m)) < f(m)$. lo que contradice la minimalidad de m. $\dashv$

Con Inducción. Sea $x \in a$. Supongamos que lo que queremos se cumple para todos los anteriores a x. Es decir: $\forall y \in a \left(y < x \longrightarrow y \leq f(y)\right)$.

- Sea $y < x$, como f es creciente, se tiene que $f(y) < f(x)$. Por H.I. se tiene además que $y \leq f(y)$. Por lo tanto $y < f(x)$.
  Esto nos dice que $f(x)$ es una $<$–cota superior de $\{y \in a : y < x\}$
- Notemos que $x = \sup_{<} \{y \in a : y < x\}$. Esto, junto con el inciso anterior nos lleva a donde queríamos, esto es, que $x \leq f(x)$.

$\dashv$

Nuevamente, la cuestión planteada justo antes de este lema es pertinente, ¡respóndanla!

A pesar de parecer un lema "bobo", el anterior nos lleva fácilmente a algunos resultados que, de otro modo, serían muy difíciles.

Corolario 2. Se tienen las siguientes proposiciones

a) Ningún buen orden es isomorfo a alguno de sus segmentos iniciales.

b) Los buenos órdenes son rígidos. Es decir, en todo buen orden hay un solo automorfismo (la identidad).

c) Entre dos buenos órdenes hay a lo más un isomorfismo.

Demostración. Sean $\langle a, < \rangle, \langle b, < \rangle \in$ **COBO**.

a) Sea s un segmento inicial de a isomorfo a a. Usando la observación inicial, hay que aplicar f al monito que determina a s para contradecir al lema anterior.

b) Sea $f : a \to a$ un automorfismo y $x \in a$. Claramente f^{-1} también es automorfismo. De esto último sabemos que $y \leq f^{-1}(y)$ para toda $y \in a$, en particular para $y = f(x)$. Así las cosas;

$$f(x) = y \leq f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Es decir; $x \leq f(x)$ & $f(x) \leq x$, i.e. $f(x) = x$.

c) Sean $f, g : a \to b$ isomorfismos. No es difícil convencerse que $g^{-1} \circ f$ es un automorfismo en a. El inciso anterior obliga a que sea la identidad. Y si estudiamos bien, es directo el hecho de que $f = g$.

Nuevamente, en ningún lado usamos que las colecciones en cuestión sean conjuntos.

$\dashv$

Teorema de la Enumeración

Teorema 3 (De la enumeración)**.** Todo buen orden es isomorfo a un único ordinal.

Demostración. Sea$\langle a, < \rangle \in$ **COBO** y $u \notin a$. Definimos $G : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ como

$$G(x) = \begin{cases} \min_{<} a \setminus x & \text{si} \quad a \setminus x \neq \emptyset \\ u & \text{si} \quad a \setminus x = \emptyset \end{cases}$$

Así (T.d.R), hay una única funcional $F : OR \to \mathscr{V}$ tal que bla bla bla.

Como en la prueba de $AEP \longrightarrow TBO$, se toma α el mínimo ordinal que no cae en a bajo F. Luego se checa que la restricción es el isomorfismo deseado. $\dashv$

Nota: Podríamos haber hecho primero la parte de "a lo mas hay un ordinal", pero la elección del mínimo ordinal asegura la unicidad. ¿Cómo generalizar esta prueba para clases bien ordenadas?

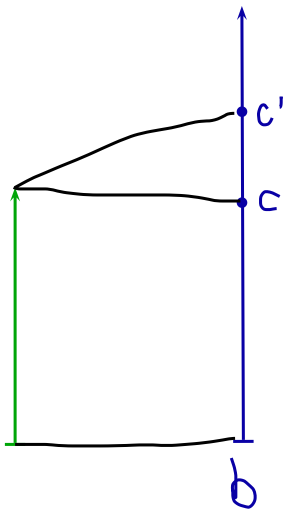
Corolario 4 (Comparación de Buenos Órdenes)**.** Sean $\langle a, < \rangle, \langle b, < \rangle \in$ **COBO**. Ocurre uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. $\langle a, < \rangle \cong \langle b, < \rangle$

2. $\langle a, < \rangle$ es isomorfo a un único segmento inicial de $\langle b, < \rangle$.

3. $\langle b, < \rangle$ es isomorfo a un único segmento inicial de $\langle a, < \rangle$.

La unicidad del segmento inicial en los dos últimos casos. En el caso 2, supongamos que a es isomorfa a dos segmentos iniciales distintos c, c' de b. Una observación "not so hard" es que en cualquier orden total, la $\subseteq$ ordena totalmente a la colección de sus segmentos iniciales. Así pues, SPG, supongamos que $c \subset c'$. c también resulta ser segmento inicial de c' (con el oden inducido). La situación en que estamos es la siguiente:



Claramente, esto contradice nuestro Lema 1. Lo mismo pasa con el caso 3. ⊣

Los tres casos son excluyentes: (A lo más pasa uno de los tres casos) Nuevamente hay que contradecir el Lema 1, lo que no es muy difícil. ⊣

Sucede al menos uno de los tres casos: Sea α el único ordinal isomorfo a $\langle a,<\rangle$ y β el único ordinal isomorfo a $\langle b,<\rangle$. Ahora si, como OR es clase bien ordenada, tenemos tres casos:

$\alpha=\beta$ En tal caso se da el isomorfismo.

$\alpha\in\beta$ Se da el caso 2, tomando las restricciones necesarias.

$\beta\in\alpha$ Se da el caso 3, tomando las restricciones necesarias.

⊣

Etcéteras

Proposición 1 (Sólo para maníacos.)**.** Comparación de B.O. $\Longrightarrow$ Teo. de la Enumeración.

Demostración. Sea $\langle a,<\rangle\in\mathbf{COBO}$.
Tómese $\beta_0=\sup\{\alpha^+ : \alpha\, isi\, a\}=\text{mín}\{\gamma : a\, isi\, \gamma^+\}$.
Ya saben, hay que ver en la primer igualdad que la colección está acotada superiormente y en la segunda igualdad que es una colección no vacía. ⊣

¡Ojo! Se puede demostrar primero la comparación de buenos órdenes, como en el Hrbacek-Jech. De hecho, hay una prueba de la comparación de buenos órdenes con clases (en el Levy), ese es más fuerte, pero para ello se requiere un poco más de herramienta. Además, para lo que vamos a hacer este semestre, basta con esta versión.

Observaciones (Lema muy útil.)**.** Sea $\langle a,<\rangle\in\mathbf{COBO}$ y $b\subseteq a$. Se tiene que $\langle b,<\restriction_b\rangle$ es isomorfo a $\langle a,<\rangle$ o a un segmento inicial de este último.

Demostración. De no ser el caso..... Por comparación de Buenos órdenes, tenemos que $\langle a,<\rangle$ es isomorfo a un segmento inicial de b (a un conjunto acotado superiormente), y si lo vemos dentro de a, esto es imposible (por razones analógas a los primeros dos incisos del corolario 2). ⊣