AE $\longrightarrow$ TBO

Ya que se hemos visto los ordinales y hemos enunciado el Teorema de la Recursión para **OR**, veremos **cómo** utilizar estas herramientas en una de las demostraciones que ya platicamos alguna vez, pero que dejamos pendiente. Recordemos antes dos enunciados equivalentes.

Axioma. (Elección, AE). Dice que "*cualquier conjunto x cuyos elementos no sean vacíos tiene una función de elección (electora)*", lo que formalizamos alguna ocasión como

$$\forall x\left(\emptyset \notin x \longrightarrow \exists e\left(\underbrace{e : x \to \bigcup x \wedge \forall y\left(y \in x \longrightarrow e(y) \in y\right)}_{e \text{ es una electora para } x}\right)\right)$$

La parte de color indica que e debe cumplir dos "cosas":

- e es un objetito de nuestra teoría (un conjunto pues) que resulta ser una función de x en $\bigcup x$. Ojo; esto se podría escribir a mayor detalle, ¡Inténtenlo sin perder el hilo!
- A cualquier conjunto que nos tomemos en x (el dominio de e), e lo manda a uno de sus elementos.

Axioma. (Elección para la Potencia, AEP). Dice que "todo conjunto tiene una función de elección (electora) para $\wp(x)$", lo que capturamos dentro de nuestra teoría formal como

$$\forall x \exists f\left(\underbrace{f : \wp(x)\setminus\{\emptyset\} \to x \wedge \forall y\left(y \in \wp(x)\setminus\{\emptyset\} \longrightarrow f(y) \in y\right)}_{f \text{ es una electora para } \wp(x)}\right)$$

Lema 1.

$$\textbf{AE} \longleftrightarrow \textbf{AEP}$$

No es difícil ver esta equivalencia desde **ZF**, por lo que, en realidad, el lema anterior establece que

$$\textbf{ZF} \vdash \textbf{AE} \longleftrightarrow \textbf{AEP}$$

Ahora si veamos lo importante:

Proposición 1 (En **ZF**).

$$\textbf{AEP} \longrightarrow \textbf{TBO}$$

Demostración. Tomemos un conjunto a de preferencia no vacío (¿que pasa si lo fuera?), lo que debemos es asegurar la existencia de una relación $<$ que lo bien ordene. La forma usual de hacerlo es "*construir*" (con recursión) una biyección entre a y un segmento inicial de **OR**.

Decimos que "construimos" tal función, pero para que la construcción jale debemos tener de antemano una función de elección para x (sino que chiste). Sea pues e una de tales funciones y $u \notin x$.

Para usar recursión debemos dar una funcional $G : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$. En nuestro caso, la definimos como;

$$G(x) = \begin{cases} e(a \setminus x) & \text{si} \quad a \setminus x \neq \emptyset \\ u & \text{si} \quad a \setminus x = \emptyset \end{cases}$$

Así, el Teorema de Recursión (una variante) para **OR** nos da una funcional $\mathbf{F}:\mathbf{OR}\to\mathscr{V}$ tal que

$$\forall\alpha\left(\mathbf{F}(\alpha)=G(\mathbf{F}[\alpha])\right)$$

Hagamos algunos cálculos:

$$\mathbf{F}(0)=G\left(\mathbf{F}[0]\right)=G(\emptyset)=e(a\setminus\emptyset)=e(a)$$
$$\mathbf{F}(1)=G\left(\mathbf{F}[\{0\}]\right)=G\left(\{e(a)\}\right)=\begin{cases} e\left(a\setminus\{e(a)\}\right) & \text{si} \quad a\setminus\{e(a)\}\neq\emptyset \\ u & \text{si} \quad a\setminus\{e(a)\}=\emptyset \text{ (aquí se acabaría).}\end{cases}$$

Los demás salen fácil... hehe

Afirmación: $\exists\beta\left(\mathbf{F}\left(\beta\right)\notin a\right)$

Prueba de la afirmación. Supongamos que la afirmación no ocurre, es decir;

$$\forall\beta\left(\mathbf{F}\left(\beta\right)\in a\right) \qquad (**)$$

¿Qué quiere decir lo anterior? Nos agarramos un ordinal cualquiera, digamos γ.
La construcción recursiva nos dice que $\mathbf{F}\left(\gamma\right)=G\left(\mathbf{F}\left[\gamma\right]\right)$.

$$(**)\implies G\left(\mathbf{F}\left[\gamma\right]\right)\in a\implies G\left(\mathbf{F}\left[\gamma\right]\right)\notin u$$

Esto último, junto con la definición de G nos dice que $a\setminus\mathbf{F}[\gamma]\notin\emptyset$. Hay que tener esto en cuenta en lo que sigue.

Lo que sigue en la prueba es ver que $\mathbf{F}$ es una funcional inyectiva de **OR** en a. Sean α,β tales que $\alpha\neq\beta$. Sin pérdida de generalidad $\alpha\in\beta$.

$$\alpha\in\beta\implies\mathbf{F}(\alpha)\in\mathbf{F}\left[\beta\right] \qquad (\bigstar)$$

Como $a\setminus\mathbf{F}[\beta]\notin\emptyset$, entonces

$$\mathbf{F}\left(\beta\right)=e\left(a\setminus\mathbf{F}\left[\beta\right]\right)\in a\setminus\mathbf{F}\left[\beta\right]\implies\mathbf{F}\left(\beta\right)\notin\mathbf{F}\left[\beta\right] \qquad (\spadesuit)$$

De $(\bigstar)$ y $(\spadesuit)$ se sigue que $\mathbf{F}\left(\beta\right)\neq\mathbf{F}(\alpha)$, con lo que terminamos la prueba de que $\mathbf{F}$ es inyectiva.
Así las cosas, $\mathbf{F}^{-1}$ es funcional. Por reemplazo, $\mathbf{F}^{-1}[a]=\mathbf{OR}$ es un conjunto. !!!!!! $\dashv$

Con la afirmación en mano continuamos

$$\beta_0=\bigcap\left\{\beta:\mathbf{F}\left(\beta\right)\notin a\right\}$$

es decir, β_0 es el mínimo de esa clase. Ahora consideramos $\mathbf{F}':=\mathbf{F}\restriction_{\beta_0}$.

- $\mathbf{F}'$ es una funcional inyectiva. Esta prueba es igual a la de la afirmación anterior.
- $\mathbf{F}'$ es sobre a. **TAREA**.

Ahora si, $\mathbf{F}'$ es una biyeccín entre β_0 y a, solo *copiamos* el orden de β_0 y listo.

$$x<_a y\iff\mathbf{F}^{-1}(x)\in\mathbf{F}^{-1}(x)$$

$\dashv$

El regreso de la proposición en sencillo, construyes la función mediante el mínimo de cada subconjunto.