En estas notas se obvian los conceptos de "**COPO**", "**COTO**", "**CODO**" y "**COBF**", que se encuentran en las notas sobre órdenes del semestre pasado[1]

Definiciones Básicas.

Definición 1. Sean A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional. Decimos que $\mathbf{R}$ *bien ordena a A* si y sólo si

1. $\mathbf{R}$ ordena parcialmente [en sentido estricto] a A,
2. Todo ***subconjunto*** no vacío de A tiene un elemento $\mathbf{R}$-mínimo, es decir;

$$\forall x\Big(\big(x \neq \emptyset \ \&\ x \subseteq A\big) \longrightarrow \exists y\Big(y \in x \ \&\ \forall z \in x\big(y\mathbf{R}z \ \vee\ y = z\big)\Big)\Big).$$

$$\forall x\Big(\big(x \neq \emptyset \ \&\ x \subseteq A\big) \longrightarrow \exists y\Big(y \in x \ \&\ \forall z \in x\big(y \neq z \longrightarrow y\mathbf{R}z\big)\Big)\Big).$$

Afirmación. Si $\mathbf{R}$ bien ordena a la clase A, entonces la ordena totalmente.

Definición 2. Decimos que $\langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un *COnjunto Bien Ordenado* si y sólo si

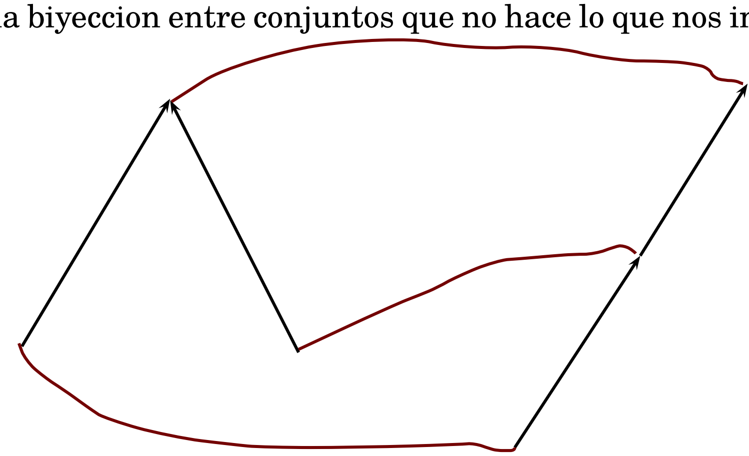
- $\langle a, \mathbf{r}\rangle \in$ **COPO**.
- $\mathbf{r}$ bien ordena a A.

Notación. **COBO** $= \{\langle a, \mathbf{r}\rangle : \langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un conjunto bien ordenado$\}$ y
$\langle a, \mathbf{r}\rangle \in$ **COBO** $\Longleftrightarrow \langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un conjunto bien ordenado.

Afirmación. **COBO** $\subseteq$ **COTO**. Aún mas fuerte: **COBO** $=$ **COTO** $\bigcap$ **COBF**.

Homomorfismos

La idea de un morfismo de orden (y nos olvidaremos del homo) sirve para comparar dos órdenes, no solamente por la cantidad de elementos que tengan, sino por cómo se parecen los órdenes de cada uno de ellas. Veamos un ejemplo de una biyeccion entre conjuntos que no hace lo que nos imaginamos que queremos:



[1]Siga el siguiente link.

Ahora si, daremos la definición bonita.

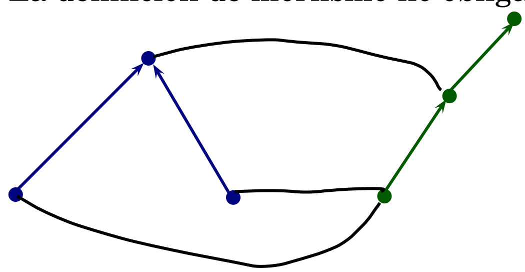
Definición 3. Empezamos con dos órdenes parciales $\langle a, < \rangle$ y $\langle b, < \rangle$ y una función $f : a \to b$.

Decimos que f es un morfismo de a en b si y sólo si

$$\forall x, y \in a \left(x < y \longleftrightarrow f(x) < f(y) \right)$$

Además, si f es una biyección, diremos que f es un isomorfismo de a en b.

La definición de morfismo no obliga a que f sea inyectiva ni sobre:



Así que la definición de isomorfismo si es interesante.

Por otro lado, cuando $\langle b, < \rangle, \langle a, < \rangle \in$ **COTO**, la definición de morfismo puede pedir menos (solo la ida), y el regreso es fácil:

Sean $x, y \in a$ tales que $f(x) < f(y)$, Por tricotomía en a, tenemos que $x = y$ o $y < x$ o $x < y$.
El primer caso no pasa porque f es función.
El segundo caso tampoco pasa porque mataría el que f es morfismo.

Por lo tanto, lo que queriamos.

¿Qué morfismos conocemos ?

- La función de encaje (o inmersión) de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.
- La función de encaje de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.
- La inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
- Las inclusiónes entre conjuntos.... cuando hay una estructura de orden.

La mayoría de las veces (en este curso) trabajaremos solamente con buenos órdenes o a lo mas con totales, así que la definición anterior nos basta (con solo la ida).

CONCATENACIÓN DE DOS ORDENES

Para esta sección es mejor remitirnos a las POKENOTAS. El archivo esta aparte.

una definicion importante: $a \quad isi \quad b$ quiere decir que “ a es isomorfo a un $<$-segmento inicial de b.

0.1. CONCATENACIÓN GENERALIZADA Y Producto ANTILEXICOGRÁFICO.

Definición 4. Sea a un conjunto de conjuntos disjuntos y sea $<_a$ una relación (binaria) sobre a. Para **cada** $x \in a$, sean $<_x$ una relación (binaria) sobre x y $\tau_x := \langle x, <_x \rangle$.

Definimos una relación $\prec$ (¿lo es?) sobre $\bigcup a$ de la siguiente forma:

$$r \prec s \longleftrightarrow \begin{cases} \exists y \in a\big(r, s \in y \ \& \ r <_y s\big) \\ \\ r \in z \ \& \ s \in z' \ \& \ z \neq z' \ \& \ z <_a z' \end{cases}$$

Como normalmente comenzamos con órdenes parciales, al orden así obtenido se le llama *concatenación de los órdenes en a*.

Lo correspondiente al producto esta en las POKENOTAS correspondientes.

Observaciones **TAREA**

- $\langle a, <_a \rangle \in \mathbf{COPO} \ \& \ \forall x \in a \left(\langle x, <_x \rangle \in \mathbf{COPO}\right) \longrightarrow \langle \bigcup a, \prec \rangle \in \mathbf{COPO}$.
- $\langle a, <_a \rangle \in \mathbf{COTO} \ \& \ \forall x \in a \left(\langle x, <_x \rangle \in \mathbf{COTO}\right) \longrightarrow \langle \bigcup a, \prec \rangle \in \mathbf{COTO}$.
- $\langle a, <_a \rangle \in \mathbf{COBO} \ \& \ \forall x \in a \left(\langle x, <_x \rangle \in \mathbf{COBO}\right) \longrightarrow \langle \bigcup a, \prec \rangle \in \mathbf{COBO}$.
- $\langle a, <_a \rangle \in \mathbf{COBF} \ \& \ \forall x \in a \left(\langle x, <_x \rangle \in \mathbf{COBF}\right) \longrightarrow \langle \bigcup a, \prec \rangle \in \mathbf{COBF}$.