La Concatenación

Supongamos que tenemos $(a,<_a)$ y $(b,<_b) \in COTO.$ Ahora veremos lo que correspondería a poner b adelante de $a,$ de esta forma tendremos un nuevo orden donde todos los tipitos de b serán mayores que los de $a.$ La definición formal es la siguiente:

Definición$_1$ Sean $(a,<_a)$ y $(b,<_b) \in COTO$ con $a \cap b = \emptyset.$ Entonces definimos *La concatenación de* $(a,<_a)$ *y* $(b,<_b)$ como $(a,<_a) \circ (b,<_b) = (a \cup b, <_{a \circ b})$ donde:

$$x <_{a\circ b} y \Leftrightarrow \begin{cases} x,y \in a \text{ y } x <_a y \\ x,y \in b \text{ y } x <_b y \\ x \in a \text{ y } y \in b \end{cases}$$

Como siempre escribiremos $a \circ b$ en ves de $(a,<_a) \circ (b,<_b).$ El siguiente lema es de rutina:

Lema$_1$ **Sean** $(a,<_a)$ **y** $(b,<_b) \in COTO$ **con** $a \cap b = \emptyset.$ **Entonces**:

$a)$ $a \circ b \in COTO$

$b)$ **Si** $(a,<_a)$ **y** $(b,<_b) \in COBO$ **entonces** $a \circ b \in COBO$

$c)$ **Si** $(a,<_a) \cong (a',<_{a'}),(b,<_b) \cong (b',<_{b'})$ **y** $a' \cap b' = \emptyset$ **entonces** $a \circ b \cong a' \circ b'$

Hay que observar que la hipotesis de que los monitos sean ajenos es fundametal pues de lo contrario la relación no estaría bien definida. Aunque por el inciso $c)$ esto no es gran problema, pues si tenemos dos $COTO's$ no necesariamente ajenos, podriamos simplemente pintarlos de distinto color y luego concatenarlos. Siempre pensaremos la concatencación de está forma, de modo que podemos coinsiderar cosas de la forma $\omega \circ \omega.$

Lo siguiente es sencillo pero util:

Lema$_2$ **Sea** $(a,<) \in COTO$ **con** $a = b \cup c,$ **donde** $b \cap c = \emptyset$ **y cualquier elemento de** b **es menor que cualquier elemento de** c, **entonces** $a \cong b \circ c$

A partir de ahora nos restringiremos a trabajar con buenos ordenes. Sabemos que un buen orden queda determinado por sus segmentos iniciales, asi que estaría kawaii responder la siguiente pregunta:

Como son los segmentos iniciales de $a \circ b$?

Tomemos $c \in a \cup b$ así tenemos 2 casos:

$\star)$ $c \in a$

Así es claro que tenemos $c_{<_{a \circ b}} \cong c_{<_a}$

$\star\,\star)$ $c \in b$

Aquí tenemos que $c_{<_{a \circ b}} \cong a \circ c_{<_b}$

Es claro que tenemos $a \circ \emptyset = \emptyset \circ a = a$, también tenemos que $1 \circ a$ es ponerle un minimo a a, mientras que $a \circ 1$ es ponerle un maximo.

Ahora pasemos a ver propiedades algebraicosas de la concatenación:

Proposición$_1$ $a)$ **No hay conmutatividad**
$b)$ **Asociatividad**

$a)$ **No hay conmutatividad**

Tenemos que $1 \circ \omega \cong \omega$ mientras que $\omega \circ 1$ tiene maximo, por lo que no $1 \circ \omega \ncong \omega \circ 1$

La siguiente es una graciosa aplicación:

Proposición$_2$ **Definimos los reales extendidos** $\overline{\mathbb{R}} = 1 \circ \mathbb{R} \circ 1.$ **Aquí todo conjunto tiene infimo y supremo**

Ahora veamos que concatenar por la izquierda se porta muy cute:

Proposición$_3$ $\quad$ $a)$ $a \text{ isi } b \iff c \circ a \text{ isi } c \circ b$

$b)$ **Hay cancelación Izquierda**:

$c \circ a \cong c \circ b \Rightarrow a \cong b$

$a)$ $\quad a \text{ isi } b \iff c \circ a \text{ isi } c \circ b$

$\Rightarrow]$

Sea $x \in b$ tal que $a \cong x_{<_b}$ entonces:

$$\begin{aligned} c \circ a &\cong c \circ x_{<_b} \\ &\cong x_{<_{c \circ b}} \end{aligned}$$

$\Leftarrow]$

Supongamos que no, así tenemos 2 casos:

$\star)$ $\quad a \cong b$

Pero entonces $c \circ a \cong c \circ b$

$\star\star)$ $\quad b \text{ isi } a$

Pero por el inciso anterior tendriamos $c \circ b \text{ isi } c \circ a$

$b)$ $\quad c \circ a \cong c \circ b \Rightarrow a \cong b$

Lo haremos por contrapositiva, supongamos que $a \ncong b$ así tenemos que $a \text{ isi } b$ o $b \text{ isi } a$ y por lo anterior obtenemos que $c \circ a \text{ isi } c \circ b$ o $c \circ b \text{ isi } c \circ a$ y encualquier caso $c \circ a \ncong c \circ b$

Y que pasa con la cancelación derecha? pues está chafea...

Proposición$_4$ $\quad$ **No hay cancelación derecha**

Tenemos que $1 \circ \omega \cong 2 \circ \omega$ sin embargo tribilinmente $1 \ncong 2$

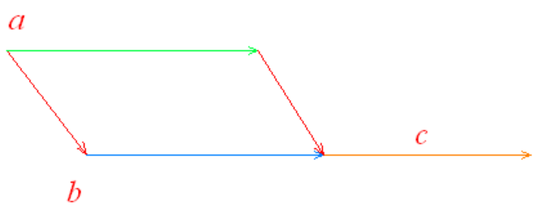
Y por lo mismo tenemos que la concatenación por la derecha no preserva isi. Pero al menos no lo voltea:

Proposición$_5$ **Si** $a \; isi \; b$ **entonces** $a \circ c \; isi \; b \circ c$ **o** $a \circ c \cong b \circ c$

Solo tenemos que probar que hay un monomorfismo de $a \circ c$ a $b \circ c$.

Sea $x \in b$ tal que $x_{<_b} \cong a$ así tenemos que $a \circ c \cong x_{<_b} \circ c$ y este isomorfismo es un monomorfismo a $b \circ c$ por lo que tenemos el resultado

Supongamos que $a \; isi \; b$ entonces la cosa se ve asi:



En el dibujito como que $a \circ c$ se parece muchisimo a b, de hecho tenemos:

Proposición$_6$ **Si** $a \; isi \; b$ **entonces existe un unico** c **tal que** $a \circ c \cong b$

Supongamos que $a \cong x_{<_b}$ con $x \in b$. Ahora sea $c = \{ \; y \in b \; | \; x \leq y \; \}$ Por el lema$_2$ tenemos que $b \cong x_{<_b} \circ c$, el cual es isomorfo a $a \circ c$. La unicidad se da por la cancelación izquierda.

Para tenerminar el capitulo veamos la siguiente sencilla observacion:

Proposición$_7$ **Sea** $b \neq \emptyset$. **Entonces**:

$a \circ b$ **tiene maximo** $\Leftrightarrow$ b **tiene maximo**