Producto Antilexicografico

Ahora si tenemos $(a,<_a)$ y $(b,<_b) \in COTO$ veremos como definirle un orden a $a \times b$ apartir de ellos. Este orden consiste en comparar dos parejitas **empezando por atras**. La definición es la siguiente:

Definición$_1$ Sean $(a,<_a)$ y $(b,<_b) \in COTO$. Entonces definimos *El producto antilexicografico de* $(a,<_a)$ *y* $(b,<_b)$ como $(a,<_a) \cdot (b,<_b) = (a \times b,<_{ab})$ donde:

$$(x_1,y_1) <_{ab} (x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 <_b y_2 \\ \\ y_1 = y_2 \text{ y } x_1 <_a x_2 \end{cases}$$

Tal ves paresca malvado que hayamos decidido checar la segunda entrada primero y despues la primera. La razón por está elección será clara cuando veamos el producto ordinal (es decir, por ahorita aguantense!!!). Como siempre escribiremos ab en ves de $(a,<_a) \cdot (b,<_b)$

Seguramente ni se imaginaban el siguiente lema:

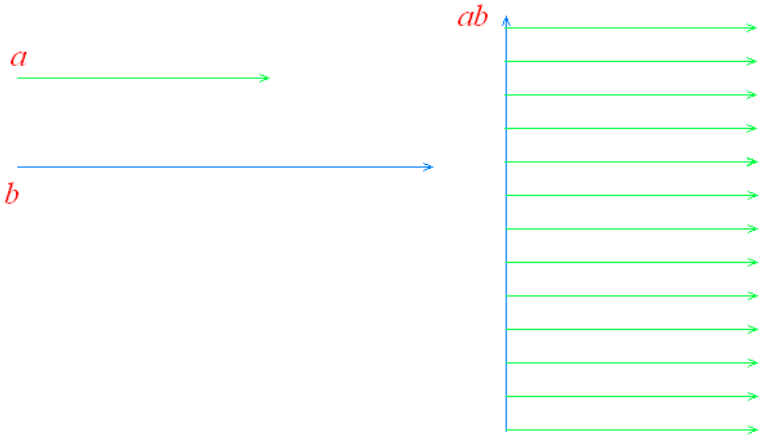
Lema$_1$ **Sean** $(a,<_a)$ **y** $(b,<_b) \in COTO$. **Entonces**:

$a)$ $ab \in COTO$

$b)$ **Si** $(a,<_a)$ **y** $(b,<_b) \in COBO$ **entonces** $ab \in COBO$

$c)$ **Si** $(a,<_a) \cong (a',<_{a'}),(b,<_b) \cong (b',<_{b'})$ **entonces** $ab \cong a'b'$

Antes de empezar a probar cosas de este monito, intentemos ver como se ve ab :



Así ab **es el orden obtenido al cambiar cada punto de** b **por una copia de** a. Esto nos lleva a pensar que el producto es como una concatenación grandota, y efectivamente así es:

Definición$_2$ Sea $(b, <_b) \in COTO$ y $c = \{ (a_i, <_i) \mid i \in b \} \subseteq COTO$ donde si $i \neq j$ entonces $a_i \cap a_j = \emptyset$. Definimos la *concatenación de c* como $\circ c = (\bigcup c, <_{\circ c})$ donde:

$$x <_{\circ c} y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in a_i \text{ y } x <_i y \\ \\ x \in a_i, y \in a_j \text{ y } i <_b y \end{cases}$$

Como es de imaginarse la concatenación de $COTO\acute{}s$ es $COTO$ y si cambiamos monitos por otros monitos isomorfos lo que tenemos es isomorfo al original.En caso de que los a_i no sean ajenos hacemos lo mismo que antes. Ahora veamos que el producto es una concatenación generalizada:

Proposición$_1$ **Sean** $(a, <_a), (b, <_b) \in COTO$ **y** $c = \{ (a_i, <_i) \mid i \in b \}$ **donde** $a_i \cong a$ **para cada** $i \in b$. **Entonces** $\circ c \cong ab$

Para concatenar tenemos que ajenizar a los monitos así pongamos $a_i = a \times \{i\}$. Entonces si tomamos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in a \times b$ $(=\bigcup c)$ tenemos que:

$$(x_1, y_1) <_{ab} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 <_b y_1 & \Leftrightarrow (x_1, y_1) <_{\circ c} (x_2, y_2) \\ \\ y_2 = y_1 \text{ y } x_1 <_a x_2 & \Leftrightarrow (x_1, y_1) <_{\circ c} (x_2, y_2) \end{cases}$$

Ahora pasemos a determinar como son los segmentos iniciales en el producto:

Proposición$_2$ $a)$ **Sea** $(x,y) \in a \times b$ **entonces** $(x,y)_{<_{ab}} \cong ay_{<_b} \circ x_{<_a}$

$b)$ $(min(a),y)_{<_{ab}} \cong ay_{<_b}$

Solo tenemos que ver que:

$$\begin{aligned}
(x,y)_{<_{ab}} &= \{ \ (c,d) \ | \ (c,d) <_{ab} (x,y) \ \} \\
&= \{ \ (c,d) \ | \ d <_b y \ \} \bigcup \{ \ (c,d) \ | \ d = y, \ c <_a x \ \} \\
&= \{ \ (c,d) \ | \ d <_b y \ \} \bigcup \{ \ (c,y) \ | \ c <_a x \ \} \\
&\cong ay_{<_b} \circ x_{<_a}
\end{aligned}$$

De nuevo restringiremos nuestra atención a los $COBO's$. Al igual que antes tenemos:

Proposición$_3$ $a)$ **No hay conmutatividad**

$b)$ **Asociatividad**

Sea $c \neq \emptyset$. **Entonces**:

$c)$ $a \ isi \ b \iff ca \ isi \ cb$

$d)$ **Hay cancelación Izquierda**:

$ca \cong cb \Rightarrow a \cong b$

$e)$ $1a \cong a1$

$a)$ **No hay conmutatividad**

Esto pasa ya que $2\omega \ncong \omega 2$

$c)$ $a \ isi \ b \iff ca \ isi \ cb$

$\Longrightarrow]$

Tomemos $x \in b$ tal que $a \cong x_{<_b}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(min(c),x)_{<_{cb}} &\cong cx_{<_b} \\
&\cong ca
\end{aligned}$$

Lo que falta es igual que antes

Y en cuanto a multiplicar por la derecha pasa lo mismo que antes:

Proposición$_4$ $a)$ **La cancelación derecha chafea**

$b)$ **Si** a *isi* b **entonces** ac *isi* bc **o** $ac \cong bc$

$a)$ **La cancelación derecha chafea**

Tenemos que $1\omega \cong 2\omega$ por lo que no podemos cancelar

$b)$ **Si** a *isi* b **entonces** ac *isi* bc **o** $ac \cong bc$

Veamos que hay un monomorfismo de ac a bc.

Tomemos $x \in b$ que cumple que $a \cong x_{<_b}$. Así $ac \cong x_{<_b}\, c$ y ese isomorfismo es un monomorfismo a bc

Ahora veamos como se relacionan la concatenación y el producto:

Proposición$_5$ $a)$ **Hay distributividad izquierda**: $a(b \circ c) = ab \circ ac$

$b)$ **La distributividad derecha chafea**

$b)$ **La distributividad derecha chafea**

Tenemos que $(1 \circ 1)\omega \cong \omega$ pero $(1\omega) \circ (1\omega) \cong \omega \circ \omega \ncong \omega$

Cuando un producto tiene maximo? es facil ver que:

Proposición$_6$ **Sean** $a, b \neq \emptyset$ **entonces**:

ab **tiene maximo** $\Leftrightarrow$ a **y** b **tienen maximo**