Traducción del Artículo "Axiomas de la Teoría de Conjuntos" Shoenfield del Barwise.

Naim Nuñez Morales.

1. Introducción.

Idealmente, un sistema axiomático se construye de la siguiente forma: Primero, elegimos los conceptos básicos y explicamos su naturaleza tanto como sea posible. Después, establecemos axiomas para tales conceptos. Si todo va bien, la explicación dada bastará para esclarecer el caracter verdadero de estos axiomaas.

Nuestra intención es presentar los axiomas de la Teoría de Conjuntos de la manera antes descrita. Al terminar, comenzaremos a explicar la noción de conjunto. Ésta puede parecer sorpresivamente complicada para el matemático que creee comprender muy bien qué es un conjunto. Sin embargo, veremos que esta explicación es muy útil, no sólo para justificar los axiomas de la Teoría de Conjuntos, sino que también para investigar nuevos axiomas y para demostrar teoremas acerca de conjuntos,

Las ideas aquí presentadas han sido desarrolladas gradualmente durante el último siglo. Aunque todas ellas son bien conocidas por la mayoría de teórico conjuntistas, raramente aparecen impresas de una modo coherente. Esto explica la falta de una bibliografía.

2. Conjuntos y su formación.

¿Cómo introducir la noción de conjunto? En una primera aproximación, un conjunto es una colección de objetos, Así, un conjunto está formado por ciertos objetos, llamados los *miembros o elementos* del conjunto; tal conjunto queda completamente determinado por sus elementos.

Los objetos que son elementos de un conjunto pueden ser de cualquier tipo. En particular, nos gustaría considerar a un conjunto como un objeto y, de esta forma, permitirle ser elemento de algún conjunto. Todos aquellos objetos utilizados como elementos de algún conjunto son llamados *urielementos*.

Aún sin usar urielementos podemos formar muchos conjuntos. Podemos formar el conjunto vacío $\emptyset$; el conjunto $\{\emptyset\}$, cuyo único elemento es $\emptyset$; el conjuntos cuyos únicos elementos son $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$; y así sucesivamente. A este tipo de conjuntos es a los que dedicaremos nuestra atención. Después explicaremos porqué no se pierde nada al hacer esto.

Hemos llegado al siguiente punto; un conjunto x se forma "eligiendo" conjuntos que serán sus elementos. ¿Hay alguna restricción sobre los conjuntos que podemos elegir? Si, como las **parajodas** (XD) de la Teoría de Conjuntos muestran.

Vamos a recordar la Paradoja de Russell: Sea r el conjunto cuyos elementos son todos aquellos conjuntos x, tales que x no es un elemento de x. Entonces para todo conjunto x

$$x \in r \longleftrightarrow x \notin x \tag{1}$$

Sustituyendo (la variable) x por (el objeto) r se llega a una contradicción.

La explicación de esto no es tan difícil de entender. Cuando estamos formando un conjunto z por elección de sus elementos, aún no tenemos al objeto z, por lo que no podemos hacer uso de él como un elemento de z. El mismo razonamiento mestra que ciertos conjuntos no pueden ser elementos de z. Por ejemplo, supongamos que $z \in y$. Entonces no podemos formar el conjunto y hasta haber formado al conjunto z. Por tanto, y no está disponible como un objeto cuando formamos a z, en vista de lo cual no puede ser un elemento de z.

Tomando lo anterior desde una mejor perspectiva, un conjunto z sólo puede tener como elementos a aquellos conjuntos que fueron construidos *antes de*[1] z. Desde esta perspectiva, para el conjunto r formado anteriormente, 1 ocurre (o se aplica) sólo para los conjuntos x formados antes de r; así que no podemos sustituir (la variable) x por (el objeto) r.

Llevando el análisis anterior un poco mas lejos, llegamos a lo siguiente. Los conjuntos son formados *por etapas*. Para cada etapa S, hay ciertas etapas *antes de* S. En la etapa S, cada colección cuyos miembros son conjuntos formados en etapas anteriores a S es, de hecho, un conjunto[2]. No hay otros conjuntos, mas que los conjuntos formados en las etapas.

Esto nos da una explicación razonablemente clara de la noción de *conjunto* en término de las nociones *etapa* y *antes de*. ¿Que podesmos decir acerca de estas nociones? Ciertamente, esperamos que *antes de* se comporte como una relación de orden (parcial estricto) sobre las etapas; y este es el único hecho sobre ella que necesitamos para nuestros axiomas.

Las etapas nos son importantes ya que nos posibilitan formar conjuntos. Supongamos que x es una colección de conjuntos y $\mathbf{S}$ es una colección de etapas para la que cada elemento de x está formado en algún miembro de $\mathbf{S}$. Si hay

[1] *antes de* en sentido lógico más que en sentido temporal. Lo mismo a lo que se entiende cuando decimos que un teorema debe ser probado antes que otro

[2] Esto significa que si un conjunto es formado en una etapa S, también puede ser formado en todas las etapas posteriores. Podemos arreglar esto último de manera que cada conjunto sea formada en exactamente una etapa, pero no hay razones de peso para ello,

una etapa después de todos los miembros de **S**, entonces podemos formar a x en tal etapa. De esta manera, la pregunta fundamental para nosotros es: Dada una colección **S** de etapas, ¿Hay alguna etapa después de todos los miembros de **S**?

Nos gustaría responder afirmativamente a esta cuestión siempre que sea posible. Por las paradojas ya conocidas, sabemos que no toda colección de conjuntos es un conjunto, pero las hemos evitado al restringirnos sólo a aquellos conjuntos formados en alguna etapa. No nos gustaría restringir aún más nuestra noción de conjunto cómo para no tener las suficientes etapas.

Sin embargo, la respuesta a nuestra interrogante no siempre puede ser afirmativa. Por ejemplo, si **S** es la colección de todas las etapas, no hay una etapa después de toda etapa en **S**.

Una respuesta posible a nuestra pregunta fundamental es la siguiente; hay una etapa después de todas las etapas de **S**, a condición de que podamos imaginar una situación en la cuál todas las etapas en **S** esten terminadas, o dadas completamente. En el caso en que **S** sea la colección de todas las etapas, no podemos imaginar tal situación, ya que siempre podemos imaginar una nueva etapa (no terminada, no presente con anterioridad). En el mejor de los casos, esta es una respuesta muy vaga, pues no es del todo claro, en general, que es lo que podemos o no imaginar. Sin embargo, nos proporciona una guía útil para obtener principios más precisos en los cuales podamos basar buestros axiomas.

Especificamente, hat tres casos en los cuales nuestra vaga respuesta nos permite concluir que hay una etapa después de cualquier miembro de **S**. El primero de ellos es cuando **S** consiste de una única etapa. El segundo es cuando **S** cconsiste de una sucesión infinita $S_0, S_1, \dots$ de etapas. El tercero es cuando tenemos un conjunto x y una etapa S_y para cada y en x, y **S** consiste de cada una de las etapas S_z, con z en x.

En los primeros dos casos, es claro que podemos imaginar una situación en la que todas las etapas de **S** están dadas completamente. En el tercer caso, podemos argumentar lo siguiente: Supongamos que cada etapa S está terminada, ahora tomemos cada y en x que está formado en la etapa S y completamos la etapa S_y. Cuando alcancemos la etapa en la que x es formado, habremos formado a todos los y en x y, por consiguiente, habremos completado cada etapa S_Y en **S**.

En este momento hemos llegado lo suficientemente lejos en nuestro análisis para obtener los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos. Aún hay muchos puntos oscuros para los que un mayor análisis llevaría a una mejor comprensión de los axiomas o a otros nuevos. Nos detendremos en algunos de ellos cuando sea pertinenete.

Es posible que exista, por supuesto, un análisis completamente distinto de la noción de conjunto, y que este desemboque en un conjunto de axiomas muy distinto. Hasta ahora, ninguno de los análisis de la noción de conjunto difiere, en esencia, del que presentamos aquí y que desemboca en un sistema de axiomas satisfactorio.

3. Axiomas.

Antes de pasar a los axiomas, debemosdescribir el lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Este lenguaje tiene *variables conjunto* (o *variables objeto*) $x, y, z, \ldots$ que representan conjuntos arbitrarios. También tiene al símbolo $\in$ para la relación de pertenencia.

El resto de la notación es [puramente] lógica. Tenemos el símbolo $=$ para *es idéntico a* o *es igual a*. Tenemos los conectivos proposicionales: $\neg$ para *no*,$\vee$ para *o*, $\wedge$ para *y*, $\longrightarrow$ para *implica*, $\longleftrightarrow$ para *si y sólo si*. Tenemos los cuantificadores: $\forall$ para *para todo*, $\exists$ para *hay alguno* y $\exists!$ para *hay un único*. Las variables que siguen a un cuantificador pueden restringise a un conjunto (*pueden acotarse a un conjunto*); e.g., $\forall x \in y$ quiere decir *para todo x en y*.

Por supuesto, algunos símbolos lógicos pueden definirse en términos del resto de ellos, pero nuestro interés está en la Teoría de Conjuntos, no en la Lógica. Por este motivo, no nos detendremos en dar los axiomas de la Lógica de Primer Orden, ni siquiera en definir de manera precisa lo que es una fórmula de la Lógica de Primer Orden. Todo eso es discutido de manera extensa en el capítulo introductorio de Barwise (**A.1**).

Recordemos como introducir (lógicamente) operaciones. Una operación unaria F se introduce definiendo $F(x)$ como el único y tal que $\varphi(x, y)$ ($\varphi(x, y)$ es una fórmula del lenguaje donde no ocurre F). Siendo más precisos. primero probamos que $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ y luego introducimos el símbolo F por el axioma $\varphi(x, F(x))$. Así, una fórmula $\psi(F(x))$ donde ocurre F, puede interpretarse como una abreviatura de $\exists y(\varphi(x, y) \wedge \psi(y))$. Las operaciones binarias y n–arias son tratadas de manera similar.

Observación. Permitimos que una operación dependa de parametros. De esta forma permitimos $F(x) = x \cup y$, donde F depende también depende de y.

Ya podemos abordar los axiomas. El primer punto de nuestro análisis es que un conjunto queda totalmente determinado por sus miembros. Este es el contenido de nuestro primer axioma.

Axioma de Extensionalidad. [3] $\forall z \left(z \in x \longleftrightarrow z \in y \right) \longrightarrow x = y$.

Uno de los puntos nodales establecidos en nuestro análisis es que ciertas colecciones de conjuntos son conjuntos. Llevando esto a nuestro lenguaje, nos encontramos con una dificultad; no hay un método general para hablar acerca de colecciones antes de saber que son conjuntos. Aún así, hay ciertas colecciones de las que si podemos hablar. Dada una fórmula$\varphi(x)$, podemos expresar ciertas cosas acerca de la colección de *todos* los conjuntos x que cumplen (que satisfacen) $\varphi(x)$. En particular, podemos decir que tal colección *es* un conjunto de la siguiente manera $\exists y \forall x \left(x \in y \longleftrightarrow \varphi(x) \right)$. Abreviaremos esta expresión como $\mathrm{Conj}\left\{ x : \varphi(x) \right\}$.

Nuestro primer principio de existencia de conjuntos es: Si todo miembro de una colección de conjuntos dada es un elemento de un conjunto x, entonces

[3] Como aqui se presenta es en forma de predicado con variables x, y.

tal colección dada es un conjunto. Para ver esto, supongamos que x está formado en la etapa S. Luego, todo elemento de x fue formado antes de S, y de esta forma también lo fue cualquier elemento de la colección. Por lo tanto, la colección puede ser formada como conjunto en la etapa S. Expresamos este principio en el siguiente axioma.

Axioma de Separación. [4] $\forall x\big(\varphi(x) \longrightarrow x \in y\big) \longrightarrow \mathrm{Conj}\{x : \varphi(x)\}$.

Nótese que "el" axioma de separación no es un único axioma, sino un conjunto infinito de axiomas, uno por cada fórmula $\varphi(x)$ (el nombre proviene del hecho que estamos separando los conjunto x que satisfacen $\varphi(x)$ de aquellos que no).

Nuestro siguiente principio es: La unión de todos los elementos de un conjunto x es un conjunto. Supongamos que x está formado en la etapa S. Luego, todo elemento de x fue formado en alguna etapa anteerior a S, y así, todo elemento de un miembro de x fue formado en alguna etapa anterior a S. Esto significa que todos los miembros de la unión fue formado en etapas previas a S; por lo que la unión puede ser formada en S. El sigiente axioma expresa dicho principio.

Axioma de Unión. [5] $\mathrm{Conj}\{z : \exists y \in x\big(z \in y\big)\}$.

El siguiente principio es: Si x es un conjunto, la colección de todos los *subconjuntos* de x es un conjunto. Supongamos que x está formado en la etapa S. Como todo elemento de x está formado con anterioridad a S, todo *subconjunto* de x está formado en S.Por lo que el conjunto de todos los *subconjuntos* de x puede formarse es cualquier etapa despues de S.

Para expresar tal prinicpio definimos[6]:

$$x \subseteq y \longleftrightarrow \forall z\big(z \in x \longrightarrow z \in y\big)$$

Axioma del Conjunto Potencia. [7] $\mathrm{Conj}\{y : y \subseteq x\}$.

Nuestro siguiente principio es: Si F es una operación unaria y x es un conjunto, entonces la colección de todos los $F(y)$, con $y \in x$, es un conjunto[8]. Para ver esto, sea S_y una etapa en la que $F(y)$ está formado. Entonces, hay una etapa S depués de todas las etapas S_y, con $y \in x$. En la etapa S podemos formar el conjunto deseado.

Axioma de Reemplazo. [9] $\mathrm{Conj}\{z : \exists y \in x\big(z = F(y)\big)\}$.

Nuestro siguiente axioma asegura la existencia de un conjunto infinito. Es un poco más complicado, pues no tenemos una forma directa en el lenguaje para decir que un conjunto es infinito.

[4] Como en el anterior, el axioma se presenta como un predicado, con única variable y.

[5] Nuevamente se presenta como un predicado con única variable x.

[6] Es el predicado (binario) de contención entre conjuntos x y y.

[7] El axioma se presenta como un predicado unario, con variable x.

[8] La imagen directa de x bajo la operación F.

[9] El predicado de reemplazo unario, con variable x.

Axioma de Infinito.

$$\exists x\Big(\exists y\in x\forall z\big(z\notin y\big)\ \ \wedge\ \ \forall y\in x\exists z\in x\forall w\big(w\in z\longleftrightarrow(w\in y\vee w=y)\big)\Big).$$

Veamos una razón por la que este axioma debe ser verdadero. Sea x_0 el conjunto vacío y, para cada n, sea x_{n+1} el conjunto cuyos elementos sonlos elementos de x_n y el mismo x_n. Podemos formar x_0 en cuaquier etapa, y una vez que x_n está formado en alguna etapa, podemos formar x_{n+1} en cualquier etapa posterior. Supongamos que x_n fue formado en la etapa S_n. Luego, hay una etapa S posterior a todas las S_n. En tal etapa podemos formar al conjunto x, cuyos elementos son $x_0, x_1, \ldots$. Este conjunto x es aquel cuya existencia afirma el Axioma de Infinito.

Un elemento y de x es un *elemento minimal* de x si x, y no tienen elementos comunes. Nuestro siguiente axioma establece que todo conjunto no vacío tiene elemento minimal.

Axioma de Regularidad. [10] $\exists y\big(y\in x\big)\ \longrightarrow\ \exists y\in x\forall z\in y\big(z\notin x\big)$.

Veamos una razón para creer en este axioma. Decimos que una etapa S es *minimal para* x si algún elemento de x es formado en la etapa S, pero ninguno de ellos es formado antes de S. Si S es *minimal para* x y si y es un elemento de x formado en S, entonces y es un *elemento minimal* de x; todo elemento de y es formado en etapas anteriores a S, por lo que no pueden ser elementos de x.

Por lo tanto, basta mostrar que para todo conjunto no vacío x, hay una etapa *minimal para* x. A menudo, esto es tomado como una propiedad evidente de las etapas. Sin embargo, daremos una prueba (gracias a Dana Scott) de que ello se sigue de los hechos que ya sabemos acerca de las etapas.

Un conjunto x está *basado*[11] si todo conjunto que tenga a x (como elemento) tiene elemento minimal (obviamente, cuando sabemos que el Axioma de Regularidad es verdadero, todo conjunto está basado).

Si todo elemento de x está basado, entonces x está basado. Sea $x\in y$. Si x, y son ajenos, x es el *elemento minimal* de y. En caso contrario, y tiene un elemento de x, que es basado (por hipótesis). De donde se sigue otra vez que y tiene elemento minimal.

Para cada etapa S, sea G_S el conjunto de todos los conjuntos basados que fueron formadoss antes de S. Es un conjunto, pues él puede formarse en la etapa S; y está basado por el párrafo anterior. Si T es una etapa anterior a S, entonces G_T está basado y se forma en T (antes de S); luego $G_T\in G_S$.

Ahora, sea x un conjunto no vacío. x es formado, digamos, en la etapa S. Sea y eel conjunto de todos los G_T, donde T es una etapa anterior a S y algún elemento de x fue formado en T. Es un conjunto, ya que cada G_T fue formado en etapas anteriores a S. Es no vacío (pues x es no vaacío) y todos sus elementos están basados. De esta forma, y tiene un elemento minimal,

[10] El predicado de regularidad con única variable x.

[11] *grounded* en el original.

G_{T_0}. Afirmamos que T_0 es *minimal para* x. De no ser así, hay una etapa U anterior a T_0 en la que algún elemento de x fue formado. Por el argumento anterior, $G_U \in G_{T_0}$; tambié $G_U \in y$, ya que U es anterior a S. Esto contradice nuestra elección de G_{T_0}. Y así, nuestra prueba está terminada.

Después agregaremos un axioma más, el Axioma de Elección. El sistema axiomático consistente por todos estos axiomas es conocido como **ZFC** y es considerado, generalmente, como la colección de axiomas estándar para la Teoría de Conjuntos.

4. Desarrollo de la Teoría de Conjuntos.

No vamos a dar un desarrollo detallado de la Teoría de Conjuntos. tan solo indicaremos como se usan varios axiomas en tal desarrollo.

Usaremos la notación $\{x : \varphi(x)\}$ para indicar *el conjunto* de todos los x que satisfacen $\varphi(x)$. Precisando,(la notación) $\{x : \varphi(x)\}$ es introducida por el axioma

$$\forall x \Big(x \in \{x : \varphi(x)\} \longleftrightarrow \varphi(x) \Big).$$

Es decir, antes de usar esta expresión, debemos probar

$$\exists! y\, \forall x \Big(x \in y \longleftrightarrow \varphi(x) \Big).$$

De existir tal y, este es único por el Axioma de Extensionalidad; y la parte de existencia es simplemente $\mathrm{Conj}\{x : \varphi(x)\}$. De esta forma, podemos usar $\{x : \varphi(x)\}$ sólo cuando ya hemos demostrado $\mathrm{Conj}\{x : \varphi(x)\}$.

Escribimos $\{F(x) : \varphi(x)\}$ en vez de $\{y : \exists x \big(\varphi(x) \wedge y = F(x)\big)\}$. Así, el Axioma de Reemplazo establece $\mathrm{Conj}\{F(x) : x \in y\}$.

Lo primero es definir las operaciones usuales de la Teoría de Conjuntos. La función principal de los axiomas a partir de ahora es mostrar que los conjuntos existen (o bien, que ciertas colecciones son necesariamente conjuntos). Esbozaremos como se hace esto.

Primero, definimos el conjunto vacío:

$$\varnothing := \{x : x \neq x\}.$$

Para mostrar que existe, sea y cualquier conjunto (el Axioma de Infinito muestra que existe algún conjunto; de forma alternativa, uno puede hacer uso de los axiomas usuales de la Lógica de Primer Orden para concluir que hay al menos un conjunto). Luego $\forall x \big(x \neq x \longrightarrow x \in y\big)$; de donde $\mathrm{Conj}\{x : x \neq x\}$, por Axioma de Separación.

A continuación definimos

$$\begin{aligned} \bigcup z &:= \{x : \exists y \in z \big(x \in y\big)\}, \\ \wp(y) &:= \{x : x \subseteq y\}. \end{aligned}$$

Tales conjuntos existen por los axiomas de Unión y del Conjunto Potencia. Les llamamos la *unión* de z y el *conjunto potencia* de y.

Ahora definimos el conjunto que consiste del elemento x y del elemento y:

$$\{x,y\} := \{z : z = x \vee z = y\}$$

No es difícil, aunque requiere trabajo, ver que este conjunto existe. Definimos una operación F como $F(\emptyset) = x$ y $F(w) = y$ para algún $w \neq \emptyset$. Si v es un conjunto, $\{F(w) : w \in v\}$ es conjunto por el Axioma de Reemplazo. Luego, por Axioma de Separación, basta elegir un conjunto v de tal manera que x, y sean elementos de $\{F(w) : w \in v\}$. Esto significa que v debe tener (como elementos) a $\emptyset$ y a otro conjunto distinto de $\emptyset$. Es fácil ver que $v = \wp(\wp(\emptyset))$ funciona para ello.

Ahora ya podemos definir las operaciones booleanas:

$$\begin{aligned} x \cup y &:= \bigcup\{x,y\}, \\ x \cap y &:= \{z : z \in x \wedge z \in y\}, \\ x \setminus y &:= \{z : z \in x \wedge z \notin y\}. \end{aligned}$$

Los últimos dos conjuntos existes por es Axioma de Separación.

Podemos definir el conjunto cuyos elementos son $x_1, \ldots, x_n$, por inducción sobre n:

$$\begin{aligned} \{x_1\} &:= \{x_1, x_1\}, \\ \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} &:= \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Las demás operaciones ya pueden ser fácilmente definidas.

La Teoría de Conjuntos no sólo se dedica a conjuntos, sino también con relaciones y funciones, que no son otra cosa que conjuntos de pares ordenados[12]. En general, el par ordenado $\langle x,y\rangle$ no se piensa como un conjunto, pero podemos identificarlo con uno, si este hace todo aquello que queremos que cumpla un par ordenado. En realidad, todo lo que queremos que haga un par ordenado es especificar su primera y segunda "coordenada". Dicho de otro modo, la únic apropiedad esencial de un par ordenado es

$$\langle x,y\rangle = \langle z,w\rangle \longrightarrow x = z \wedge y = w. \tag{2}$$

Hay varias definiciones de $\langle x,y\rangle$ que cumplen lo anterior; la más simple es

$$\langle x,y\rangle := \{\{x\},\{x,y\}\}.$$

Dejamos al lector verificar que esta definición cumple (2).

Ahora definimos el producto cartesiano:

$$x \times y := \{\langle z,w\rangle : z \in x \wedge w \in y\}.$$

Para demostrar que este conjunto existe, notemos que

$$z \in x \wedge w \in y \longrightarrow \langle z,w\rangle \in \wp\Big(\wp\big(x \cup y\big)\Big)$$

[12]identificaremos aquí a una función f con el comjunto de todas las parejas ordenadas de la forma $\langle f(x), x\rangle$ en vez de el conjunto de todos los pares ordenador de la forma $\langle x, f(x)\rangle$.

y luego se hace uso del Axioma de Separación.

Una aplicación es la extensión del Axioma de Reemplazo a dos (o más) argumentos:

$$\mathrm{Conj}\{F(z,w) : z \in x \wedge w \in y\}. \tag{3}$$

Para ello, definimos una nueva operación G como $G(\langle z,w\rangle) = F(z,w)$ y $G(v) = \emptyset$ si v no es un par ordenado (lo que es legítimo hacer, por (2)). Entonces

$$\Big\{F(z,w) : z \in x \wedge w \in y\Big\} \;=\; \Big\{G(v) : v \in x \times y\Big\};$$

de donde (3) se sigue del Axioma de Reemplazo.

Ahora vamos a mostrar que nuestra teoría también puede tratar con los objetos usuales de las matemáticas. Tales objetos estan formados, por lo regular, con operaciones teórico conjuntistas a partir de números. Es conocido que todos los números (reales, complejos, enteros y racionales) pueden ser construidos a partir de los números naturales (usando algunas operaciones teórico conjuntistas). Mostraremos como definir los números naturales en **ZFC**.

Es innmediato que cada número natural n debe ser identificado con un conjunto, pero ¿Qué conjunto debemos elegir para tal identificación? Es natural que esta elección sea un conjunto con n elementos; y la elección obvia es el conjunto de los números naturales menores que n. De esta forma, el número 0 es identificado con el conjunto vacío, el 1 es identificado con el conjunto $\{0\}$, el 2 con el $\{0,1\}$, y así sucesivamente. Con lo anterior queda claro que la *operación sucesor* debe ser definida como

$$s(x) \;=\; x \cup \{x\}.$$

Ahora decimos que un conjunto es *inductivo* si tiene al $\emptyset$ y es cerrado bajo la operación sucesor. Entonces definimos a un *número natural* como un conjunto que pertenece a todos los conjuntos inductivos.

Queda mostrar los axiomas de Peano. El único que da alguna dificultad es

$$s(x) = s(y) \longrightarrow x = y \tag{4}$$

Supongamos que $s(x) = s(y)$. Por el Axioma de Regularidad, $\{x,y\}$ tiene un elemento minimal, digamos que este es y (el otro caso en análogo). Luego, $x \notin y$. Así, $x \in s(x) = s(y) = y \cup \{y\}$; de donde $x \in y$ o $x = y$. Por tanto, $x = y$. En el caso en que x, y sean números naturales, se puede demostrar (4) sin hacer uso del Axioma de Regularidad. Sin embargo, (4) es útil algunas ocasiones para conjuntos x, y arbitrarios.

El Axioma de Infinito dice que existe un conjunto inductivo. Debido a ello y haciendo uso del Axioma de Separación, vemos que existe el conjunto de los números naturales.

Es este momento en que podemos ver porqué los urielementos no son necesarios: todos los objetos que deseamos considerar son conjuntos, o al menos pueden ser identificados con conjuntos. De hecho, se requiere un poco de esfuerzo adicional para reformular nuestros axiomas para permitir la existencia de urielementos, y ello podría ser útil para algunos propósitos.

Es muy sorprendente que podamos definir todos los objetos usuales de las matemáticas y demostrar sus propiedades en **ZFC**. Esto muestra, sin duda, que **ZFC** es un sistema axiomático muy poderoso. Sin embargo, no hay que darle mucha importancia a esto. Identificar las matemáticas con **ZFC** (o decir, dandole un toque misterioso, que **ZFC** es un fundamento de las matemáticas) es inútil y engañoso. Lleva a uno a pensar quelos objetos que no son definible en **ZFC** no son objetos matemáticos, y que las verdades que no pueden ser demostradas en **ZFC** no son verdades matemáticas. Es una limitación estéril en las matemáticas.

5. Ordinales.

Aunque las etapas aparecieron en nuestra descripción de los conjuntos, ellas no entraron en nuestros axiomas. Mostraremos que de este modo nada se ha perdido; podemos definir las etapas y que ellas tienen las propiedades adecuadas en **ZFC**.

Vamos a intentar identificar las etapas con ciertos conjuntos, que llamamos *ordinales*. A grandes rasgos, los ordinales se obtienen al extender la secuencia de números naturales.

Un conjunto x es *transitivo* si todo elemento de x es subconjunto de x. Un *ordinal* es un conjunto transitivo x en que todos sus elementos también lo son[13]. Usamos letras griegas (minúsculas) para denotar ordinales.

Teorema 5.1. El conjunto $\varnothing$ es un ordinal. Si α es un ordinal, entonces $s(\alpha)$ es un ordinal.

Demostración. La prueba es fácil y se deja al lector. □

Corolario. Todo número natural es un ordinal.

Teorema 5.2. Todo elemento de un ordinal es un ordinal.

Demostración. Sea $x \in \alpha$. Luego, x es transitivo; así que sólo nos resta mostrar que todo elemento y de x es transitivo. Como α es transitivo, $x \subseteq \alpha$: de donde $y \in \alpha$ y, por tanto y es transitivo. □

Definimos ahora

$$\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta,$$
$$\alpha \leq \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta.$$

Primero veremos que $<$ ordena parcialmente a [la clase de] los ordinales, u.e., que

$$\neg(\alpha < \alpha) \tag{5}$$

$$(\alpha < \beta) \wedge (\beta < \gamma) \longrightarrow \alpha < \gamma \tag{6}$$

Por Axioma de Regularidad, α es un elemento minimal de $\{\alpha\}$. Esto significa que $\alpha \notin \alpha$, es decir (5). (6) es consecuencia de que γ es un conjunto transitivo.

[13] ¿Falta pedir que $\in$ ordena linealmente a x?

Teorema 5.3. Si $\forall\alpha\,\forall\beta\big((\beta<\alpha\wedge\varphi(\beta))\longrightarrow\varphi(\alpha)\big)$, entonces $\forall\alpha\,\varphi(\alpha)$.

Demostración. Supongamos la hipótesis y que, no obstante, $\neg\varphi(\alpha_0)$, para llegar a una contradicción. Consideremos la colección

$$x=\{\alpha:\alpha<\alpha_0\wedge\neg\varphi(\alpha)\};$$

este conjunto existe porque cada α es elemento de α_0. Mas aún, $x\neq\emptyset$; en otro caso, en vista de la hipótesis, tendríamos $\varphi(\alpha_0)$. Así las cosas, x tiene un lemento minimal, α'. Si $\beta<\alpha'$, entonces $\beta<\alpha_0$, por (6), y $\beta\notin x$, por elección de α'. Así que $\varphi(\beta)$. En vista de nuestrs hipótesis, tenemos que $\varphi(\alpha')$, lo que contradice el hecho de que $\alpha'\in x$. □

El teorema 5.3 nos dice que si queremos demostrar $\varphi(\alpha)$ para cualquier α, debemos tomar un α arbitrario y suponiendo que $\varphi(\beta)$, para todo $\beta<\alpha$, demostrar $\varphi(\alpha)$. Una prueba con este método es llamada una prueba de $\varphi(\alpha)$ *por inducción sobre* α; la suposición de que $\varphi(\beta)$, para toda $\beta<\alpha$, es llamada *hipótesis de inducción*.

Ahora mostramos que $<$ ordena linealmente a los ordinales, i.e., que

$$\alpha<\beta\vee\beta<\alpha\vee\alpha=\beta. \tag{7}$$

Denotamos (7) como $C(\alpha,\beta)$. Demostramos $\forall\beta\,C(\alpha,\beta)$ por inducción sobre α. Para probar $\forall\beta\,C(\alpha,\beta)$, demostramos $C(\alpha,\beta)$ por inducción sobre β. De esta forma, estamos demostrando $C(\alpha,\beta)$ usando las dos hipótesis inductivas:

$$\forall\gamma<\alpha\,C(\gamma,\beta), \tag{8}$$

$$\forall\gamma<\beta\,C(\alpha,\gamma). \tag{9}$$

Ahora tenemos tres casos; $\alpha=\beta$ o $\alpha\setminus\beta\neq\emptyset$ o $\beta\setminus\alpha\neq\emptyset$. Si $\alpha=\beta$, entonces $C(\alpha,\beta)$. Supongamos que $\alpha\setminus\beta\neq\emptyset$. Por el teorema 5.2 y la definición de $<$, hay un ordinal γ tal que $\gamma<\alpha$ y $\neg(\gamma<\beta)$. Por (8), $C(\gamma,\beta)$, i.e., o bien $\gamma<\beta$ o bien $\beta\leq\gamma$. Como la primer posibilidad es falsa, $\beta eq\gamma$. Ya que $\gamma<\alpha$, $\beta<\alpha$ (por (6)); y asi se concluye que $C(\alpha,\beta)$. Se demuestra de manera análoga (usando (9) en vez de (8)) si $\beta\setminus\alpha\neq\emptyset$.

Usando lo anterior, podemos demostrar que

$$\alpha\leq\beta\longleftrightarrow\alpha\subseteq\beta. \tag{10}$$

Pues si $\alpha\leq\beta$, $\gamma<\alpha\longrightarrow\gamma<\beta$, por (6); así que $\alpha\subseteq\beta$, por el teorema 5.2. Si $\neg(\alpha\leq\beta)$, entonces $\beta<\alpha$, por (7), y $\neg(\beta<\beta)$, por (5). Por consiguiente $\beta\in\alpha\setminus\beta$; de donde $\neg(\alpha\subseteq\beta)$.

Decimos que α es el *menor* ordinal tal que $\varphi(\alpha)$ si ocurre $\varphi(\alpha)$ y para todo ordinal β para el cual $\varphi(\beta)$, se tiene que $\alpha\leq\beta$. Hay a lo más uno de tales α, pues $\alpha'\leq\alpha$ y $\alpha<\alpha'$ implican $\alpha=\alpha'$, por (5) y (6).

Teorema 5.4. Si $\exists\alpha\,\varphi(\alpha)$, entonces hay un menor ordinal α' tal que $\varphi(\alpha')$.

Demostración. Supongamos que no hay tal α', y vamos a probar que $\neg\varphi(\alpha)$ por inducción sobre α. Si $\varphi(\beta)$, la hipótesis de inducción nos dice que $\neg(\beta<\alpha)$; así que $\alpha\leq\beta$. Por tanto $\neg\varphi(\alpha)$; en otro caso tendríamos que α sería el menor ordinal tal que $\varphi(\alpha)$. □

Tenemos dos ejemplos nada complicados de *menores ordinales*: 0 es el menor ordinal; $s(\alpha)$ es el menor ordinal β, tal que $\alpha<\beta$.

Teorema 5.5. Si x es un conjunto de ordinales, entonces $\bigcup x$ es el menor ordinal α tal que $\forall\beta\in x(\beta\leq\alpha)$.

Demostración. La unión de un conjunto cuyos elementos (todos) son conjuntos transitivos, es un conjunto transitivo; así que $\bigcup x$ es transitivo. Todo elemento de $\bigcup x$ es elemento de algún ordinal en x que, por hipótesis, es transitivo. De esta forma $\bigcup x$ es un ordinal. Lo que resta del teorema se sigue de (10). □

Corolario. Si x es un conjunto de ordinales, hay un ordinal que es mayor (estricto) que cualquier elemento de x.

Demostración. Basta tomar $s(\bigcup x)$. □

Por el corolario anterior, hay un ordinal que no es un número natural (mayor que todos ellos). Al menor de tales ordinales le llamamos ω. Como $\omega\neq 0$ y 0 es el primer ordinal,

$$0<\omega. \tag{11}$$

También

$$\alpha<\omega \longrightarrow s(\alpha)<\omega. \tag{12}$$

Pues si $\alpha<\omega$, $s(\alpha)\leq\omega$, ya que $s(\alpha)$ es el menor ordinal que es mayor a α. Como $\alpha<\omega$, α es un número natural; luego $s(\alpha)$ también lo es, por lo que $s(\alpha)\neq\omega$.

De (11) y (12) se sigue que cualquier número natural es menor a ω, por lo que le pertenece. Por otra parte, todo elemento en ω es un ordinal menor a ω y, por tanto, un número natural. Así, ω es justamente el conjunto de los números naturales.

A continuación, nos centraremos en como definir operaciones por inducción. La idea es que nos gustaría definir $F(\alpha)$ en término de α y de $F(\beta)$, para $\beta<\alpha$. Todos los $F(\beta)$'s puedes combinarse en un único objeto $F\restriction\alpha$, definido como

$$F\restriction\alpha := \{\langle F(\beta),\beta\rangle : \beta<\alpha\}.$$

Teorema 5.6. Si G es una operación binaria, entonces hay una operación unaria tal que, para toda α, $F(\alpha)=G(\alpha,F\restriction\alpha)$.

Demostración. Una α-función es una función f con dominio α, tal que para toda $\beta<\alpha$, $f(\beta)=G(\beta,f\restriction\beta)$[14]. Es fćil ver que si f es una α-función y $\beta<\alpha$, $f\restriction\beta$ es una β-función.

[14]Esta función en realidad juega el papel de una aproximación de F, y al final resultará que F restringida a α será f.

Mostraremos que hay a lo más una α-función. Para ello, supongamos que f, g son α-funciones, demostraremos que

$$\beta < \alpha \longrightarrow f(\beta) = g(\beta)$$

por inducción sobre β. Si $\gamma < \beta$, se tiene que $f(\gamma) = g(\gamma)$ por hipótesis inductiva. Así, $f \restriction \beta = g \restriction \beta$; de donde

$$f(\beta) = G(\beta, f \restriction \beta) = G(\beta . g \restriction \beta) = g(\beta).$$

En caso de existir una α-función f, tomamos $F(\alpha) = G(\alpha, f)$; en otro caso, tomamos $F(\alpha) = 0$ (resulta ser que este último caso es imposible, como ya veremos).

Primero veremos que $F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha)$, si hay una α-función. Digamos que f es la α-función, basta mostrar que $F \restriction \alpha = f$. Si $\beta < \alpha$, $f \restriction \beta$ es una β-función, por lo que $F(\beta) = G(\beta, f \restriction \beta) = f(\beta)$[15], porque f es una β-función. De esta forma $F \restriction \alpha = f$.

Resta mostrar que, dada cualquier α, siempre hay una α-función. Mostraremos que $F \restriction \alpha$ es una α-función por inducción sobre α. Sea $f = F \restriction \alpha$. Si $\beta < \alpha$, de la hipótesis inductiva y el párrafo anterior se sigue que $F(\beta) = G(\beta, F \restriction \beta)$. Esto equivale a decir que $f(\beta) = G(\beta, f \restriction \beta)$, que es lo que se quería demostrar. $\square$

En la práctica, el teorema 5.6 justifica cualquier tipo de definición en la que $F(\alpha)$ este dada en término de α y de las $F(\beta)$, para $\beta < \alpha$. Por ejemplo, dado un conjunto x definimos $F(\alpha)$ como $\{x\}$, si $\alpha = 0$; como $\bigcup F(\beta)$, si $\alpha = s(\beta)$; y como $\bigcup\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$, en otro caso. Es fácil encontrar una operación G de tal forma que, por el teorema 5.6, se obtenga F. La importacia de este ejemplo es que $F(\omega)$ es un conjunto transitivo que contiene a x. En vista de (11) y de (12), $F(\omega)$ es la unión de los $F(\alpha)$, con $\alpha < \omega$. En particular $F(0) \subseteq F(\omega)$; por lo que $x \in F(\omega)$. Si $y \in F(\omega)$, entonces $y \in F(\alpha)$, para algún $\alpha < \omega$. Luego $y \subseteq \bigcup F(\alpha) = F\big(s(\alpha)\big) \subseteq F(\omega)$, por (12). Por lo tanto $F(\omega)$ es transitivo.

Teorema 5.7. Si $\forall x \forall y \big((y \in x \wedge \varphi(y)) \longrightarrow \varphi(x)\big)$, entonces $\forall x \varphi(x)$.

Demostración. Supongamos que la hipótesis es verdadera y que $\neg\varphi(z)$ para llegar a una contradicción. Usando lo anterior, podemos tomar un conjunto transitivo w que tenga a z, y considerar al conjunto $v = \{x : x \in w \wedge \neg\varphi(x)\}$. Como $z \in v$, v tiene un elemento minimal x'. Si $y \in x'$, entonces $y \in w$ (porque w es un conjunto transitivo) y $y \notin v$; así que $\varphi(y)$. Por la hipótesis, se tiene que $\varphi(x)$, lo que contradice el hecho de que $x \in v$. $\square$

El teorema 5.7 nos dice que si queremos demostrar$\varphi(x)$ para un x arbitrario,podemos suponer que $\varphi(y)$, para toda $y \in x$. Una prueba por este método es llamada una prueba de $\varphi(x)$ por $\in$-*inducción* sobre x; la suposición de que $\varphi(y)$, para toda $y \in x$, se conoce como hipótesis inductiva.

[15] Aquí también se esta haciendo una inducción para la primer igualdad.(?)

Ahora identificamos las etapas con las etapas y la noción *"antes de"* con $<$. Decimos que un conjunto x es formado en la etapa α si y sólo si $x \subseteq R(\alpha)$, donde la operación R se define de la siguiente forma:

$$R(\alpha) := \bigcup \{\wp(R(\beta)) : \beta < \alpha\}.$$

De esta manera ya tenemos definidos los conceptos de la sección 2 en **ZFC**. Ahora procederemos a demostrar las propiedades elementales de tales conceptos.

Por definición de R,

$$y \in R(\alpha) \longleftrightarrow \exists \beta < \alpha \, (y \subseteq R(\beta)); \tag{13}$$

i.e., y está en $R(\alpha)$ si y sólo si es formado *antes de* α. Es inmediato que x está formado en α si y sólo si todos sus elementos (de x) fueron formados *antes de* α. Esta es la primer propiedad básica de la formación de conjuntos.

Despues, debemos demsotrar que si todos los miembros de una colección son formados *antes de* α, entonces tal colección es un conjunto. Por (13), esto se expresa como

$$\forall x \, (\varphi(x) \longrightarrow x \in R(\alpha)) \longrightarrow \mathrm{Conj}\{x : \varphi(x)\}.$$

Esto se sigue del Axioma de Separación.

Finalmente, debemos mostrar que todo conjunto es formado es alguna etapa, i.e.,

$$\exists \alpha \, (x \subseteq R(\alpha)). \tag{14}$$

Demostraremos esto por $\in$-inducción sobre x. Sea $F(y)$ el menor β tal que $y \subseteq R(\beta)$, o 0 si no hay tal β. Usando el corolario del teorema 5.5, elegimos un α mayor que cualquier ordinal en $\{F(y) : y \in x\}$. Si $y \in x$ y $\beta = F(y)$, entonces $y \subseteq R(\beta)$, por la hipótesis inductiva y porque $\beta < \alpha$. De esta forma $y \in R(\alpha)$, por (13).Hemos demostrado así que $x \subseteq R(\alpha)$.

Colocando $\{x\}$ en vez de x, en (14), vemos que todo conjunto pertenece a algún $R(\alpha)$. Este hecho es útil con frecuencia. Por ejemplo, podemos definir una operación F para todos los conjuntos definiendola en cada $R(\alpha)$, usando inducción sobre α. Otro uso será mencionada en la siguiente sección. De esta forma vemos que las etapas son útiles tanto para demostrar teoremas como para justificar los axiomas.

6. El Axioma de Elección.

Una *función de elección* sobre x es una función f con dominio $x \setminus \{\emptyset\}$ con la propiedad de que $f(y) \in y$, para toda y en el dominio de f. El Axioma de Elección postula que para todo conjunto x, hay una función de lección sobre x (De manera más precisa, el Axioma de Elección es la traducción de la proposición anterior al lenguaje de la Teoría de Conjuntos).

¿Porqué es verdadero el Axioma de Elección? Ya sabemos que $(\bigcup x) \times x$ es un conjunto, por lo que es formado en alguna etapa S. Entonces cada par $\langle z, y\rangle$, con $z \in y \wedge y \in x$, es formado *antes de* S. En la etapa S, podemos tomar uno de tales pares $\langle z, y\rangle$, para cada y en $x \setminus \{\emptyset\}$ y formamos el conjunto de todos esos pares $\langle z, y\rangle$. Tal conjunto sería una función de elección sobre x.

Hay una dificultad en el argumento anterior: ¿Qué queremos decir cuando decimos "podemos tomar uno de tales pares $\langle z, y\rangle$, para cada y en $x \setminus \{\emptyset\}$"? Obviamente no significa que una persona en realidad tome tales pares, pues puede haber una infinidad de ellos. Tampoco queremos decir que hay una regla para escogerlos; sin importar lo que entendamos por *regla*, no hay razón por la que tal regla deba (necesariamente) existir para un conjunto x arbitrario. Así, todo lo que podemos decir es que hay una colección de conjuntos a la que pertenece exactamente un par ordenado $\langle z, y\rangle$, para cada y. Si interpretamos *colección* como una división (clasificación) arbitraria de los objetos disponibles en miembros y no miembros, es razonable pretender que tal colección exista.

El axioma de Elección tiene muchas aplicaciones en Matemáticas, algunas de las cuales son discutidas en el capítulo **B.2**. En la Teoría de Conjuntos, las aplicaciones más interesantes se relacionan con cardinales, así que daremos una breve introducción a este tema.

Decimos que dos conjuntos x, y son *equipotentes*, y lo denotamos como $x \sim y$, si y sólo si hay un mapeo biyectivo de x en y. Es fácil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia[16]. Queremos asociar a cada conjunto x un conjunto $|x|$, llamado *el cardinal de* x, tal que

$$|x| = |y| \longleftrightarrow x \sim y \tag{15}$$

La primera consideración que debemos tener es usar clases de equivalencia; i.r, al elegir quien será la clase de equivalencia de x, $\{y : y \sim x\}$. Este último no funciona, ya que no es un conjunto. Una solución que viene a la mente (por la sección precedente) es elegir como clase de equivalencia de x como la colección $\{y : y \in R(\alpha) \wedge y \sim x\}$, donde α es el menor ordinal tal que $\exists y \in R(\alpha)\,(y \sim x)$ (el cual existe, ya que $x \sim x$ y x pertenece a algún $R(\alpha)$). Si bien esta solución funciona bastante bien, hay otra que funciona aún mejor. Definimos $|x|$ como el menor ordinal equipotente con x. Sin embargo, primero debemos mostrar que existe un ordinal que es equipotente con x.

Teorema 6.1. Si f es una función de elección sobre $\wp(x)$, entonces hay un mapeo biyectivo g de algún ordinal α en x tal que para todo $\beta < \alpha$, $g(\beta) = f\left(x \setminus \{g(\gamma) : \gamma < \beta\}\right)$.

Demostración. Definimos F por inducción como sigue:

$$F(\alpha) = f\left(x \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\}\right),$$

[16] relacional de equivalencia, ya que no esta definida sobre un conjunto, sino sobre una clase (la de todos los conjuntos) que no es conjunto.

donde $F(0)$ puede ser tomado como se quiera, digamos $\emptyset$. Entonces

$$x \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset \longrightarrow F(\alpha) \in x \wedge \forall \beta < \alpha \left(F(\alpha) \neq F(\beta)\right). \tag{16}$$

Primero mostramos que $x \subseteq \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$, para alguna α. De no ser el caso, (16) nos dice que F mapea inyectivamente los ordinales en x. La inversa de F mapea biyectivamente un subconjunto de x en la colección de todos los ordinales. Por el Axioma de Reemplazo, esta última debe ser un conjunto, lo que contradice al corolario del teorema 5.5.

Sea α el menor ordinal α' tal que $x \subseteq \{F(\beta) : \beta < \alpha'\}$. Por (16), $F \restriction \alpha$ mapea biyectivamente α en x, por lo que es la g requerida. □

Con esto hemos justificado definir $|x|$ como el menor ordinal equipotente con x. Como ya dijimos, $|x|$ es llamado el cardinal de x. Un conjunto es *un cardinal* si y sólo si es el cardinal de algún conjunto. Todo cardinal es un ordinal; y un ordinal α es un cardinal si y sólo si $\alpha = |\alpha|$.

Vamos a examinar la relación $\leq$ sobre los cardinales. Primero demostraremos que

$$x \subseteq \delta \longrightarrow |x| \leq \delta. \tag{17}$$

Definimos una función de elección sobre $\wp(x)$ como sigue: Si $y \in \wp(x) \setminus \{\emptyset\}$, sea $f(y)$ el menor ordinal en y. Sean g y α como en el teorema 6.1. Es fácil ver que

$$\beta < \gamma \longrightarrow g(\beta) < g(\gamma). \tag{18}$$

Probaremos que

$$\beta < \alpha \longrightarrow \beta \leq g(\beta) \tag{19}$$

por inducción sobre β. Supongamos que $\beta < \alpha$, pero $g(\beta) < \beta$. Por (18), $g\left(g(\beta)\right) < g(\beta)$. Como $g(\beta) < \beta$, por hipótesis inductiva se tiene que $g(\beta) \leq g\left(g(\beta)\right)$. Esta contradicción demuestra (19).

Ahora completamos la prueba de (17). Supongamos que $\delta < |x|$. Claramente $|x| \leq \alpha$; así que $\delta < \alpha$ y luego $\delta \leq g(\delta)$ por (19). Pero $g(\delta) \in x$, por lo que $g(\delta) \in \delta$, es decir $g(\delta) < \delta$. De esta forma hemos llegado a una contradicción.

Teorema 6.2. Si α y β son cardinales, entonces se tiene que $\alpha \leq \beta$ si y sólo si hay un conjunto con cardinal β que contiene un subconjunto de cardinal α.

Demostración. Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha \subseteq \beta$, por (10). Como $|\alpha| = \alpha$ y $|\beta| = \beta$, entonces β es el conjunto buscado. Ahora supongamos que $|x| = \alpha$, $|y| = \beta$, $x \subseteq y$. Hay un mapeo biyectivo de y en β; el mismo mapea x sobre un subconjunto z de β. Así, $\alpha = |x| = |z| \leq \beta$, por (17). □

Es muy fácil ver que todo número natural es cardinal y que ω es cardinal. Otros cardinales se obtienen por el teorema siguiente.

Teorema 6.3. Para todo x, $|x| < |\wp(x)|$.

Demostración. Hay un mapeo inyectivo de x en $\wp(x)$ que asigna y a $\{y\}$. Así, $|x| \leq |\wp(x)|$, por el teorema 6.2. Supongamos que $|x| = |\wp(x)|$ para llegar a una contradicción. Por (15), hay un mapeo biyectivo, f, de x en $\wp(x)$. Sea $y = \{z : z \in x \wedge z \notin f(z)\}$. Entonces $y = f(w)$, para algún w. Por lo que

$$w \in y \longleftrightarrow w \notin f(w) \longleftrightarrow w \notin y,$$

lo que es una contradicción. □

Este breve resumen nos da un panorama de la teoría cardinal, pero puede no aclarar el papel crucial del Axioma de Elección. Si no lo tuvieramos, podríamos definir a los cardinales por medio del primer método mencionado. Luego podemos definir $\alpha \leq \beta$ (para cardinales α y β) como; hay un conjunto equipotente a β con un subconjunto equipotente a α. Sin embargo, no estaríamos posibilitados para demostrar que

$$\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$$

para cualesquiera cardinales α y β (sin Axioma de Elección).

Concluimos esta sección mostrando como "se demuestra" el Lema de Zorn a partir del Axioma de Elección. Decimos que un conjunto x, parcialmente ordenado, está *inductivamente ordenado* si y sólo si todo subconjunto (de x) linealmente ordenado tiene una cota superior. El Lema de Zorn afirma que todo conjunto x inductivamente ordenado tiene un elemento maximal.

Para probar esto, sea f una función de elección sobre $\wp(x)$. Definimos una operación F por inducción:

$$F(\alpha) = \begin{cases} f\left(\{y \in x : \forall \beta < \alpha\,(F(\beta) < y)\}\right) & \textbf{si } \{y \in x : \forall \beta < \alpha\,(F(\beta) < y)\} \neq \emptyset \\ \emptyset & \textbf{si } \{y \in x : \forall \beta < \alpha\,(F(\beta) < y)\} = \emptyset. \end{cases}$$

Como en la prueba del teorema 6.1, se muestra que $x_\alpha := \{y \in x : \forall \beta < \alpha\,(F(\beta) < y)\} = \emptyset$, para alguna α. Tomemos el menor α tal que $x_\alpha = \emptyset$. Si $\gamma < \beta < \alpha$, entonces $F(\gamma) < F(\beta)$ por la elección de $F(\beta)$; así que $\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ está linealmente ordenado, por lo que tiene una cota superior, y; y es un elemento maximal, porque ningún elemento más grande podría estar en x_α.

7. Clases.

Hemos visto que ciertas colecciones de conjuntos que no son conjuntos pueden, no obstante, ser tratadas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Consideremos esto a mayor detalle.

En adelante, $\{x : \varphi(x)\}$ representa la colección de todos los conjuntos x tales que $\varphi(x)$, aún si dicha colección no es un conjunto. Tal colección será llamada una *clase*. Con mayor precisión, si cada variable de $\varphi(x)$ distinta de x se mantiene fija en un conjunto dado[17], entonces $\{x : \varphi(x)\}$ representa una colección definida, y cualquiera de tales colecciones es llamada *una clase*.

[17] Se le convierte (o se le trata) como una constante.

Tod conjunto y es una clase; $y = \{x : x \in y\}$. Sin embargo, no toda clase es un conjunto. Por ejemplo, la paradoja de Russell muestra que $\{x : x \not\in x\}$ no es un conjunto, y el corolario del teorema 5.5 muestra que la colección de todos los ordinales (que obviamente es una clase) no es un conjunto. Una clase que no es conjunto es llamada una *clase propia*.

Queremos que $\{x : \varphi(x)\}$ sea un símbolo definido; esto es, queremos que sea, en cualquier contexto, una abreviatura para una expresión en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Con el nuevo significado de $\{x : \varphi(x)\}$, lo anterior no es posible mediante el método de la sección **4**. En su lugar debemos examinar los contextos en los que $\{x : \varphi(x)\}$ puede aparecer.

Nos gustaría que la expresión $\{x : \varphi(x)\}$ aparezca inmediatamente antes o después de $\in$ o $=$. En el caso en que aparezca inmediatamente después de $\in$, se atiende la siguiente definición

$$y \in \{x : \varphi(x)\} \longleftrightarrow \varphi(y).$$

Antes de continuar, establecemos un poco de notación. Un *término* es una expresión que es o bien una variable o bien de la forma $\{x : \varphi(x)\}$[18]. Usaremos A, B y C para reprsentar términos.

En caso que $\{x\varphi(x)\}$ aparezca justo antes o después de $=$, se debe atender a la siguiente definición

$$A = B \longleftrightarrow \forall x \left(x \in A \longleftrightarrow x \in B\right). \tag{20}$$

donde $x \in A$ y $x \in B$ se deben entender de acuerdo a la primer definición.

En sentido estricto, (20) es una buena definición sólo cuando al menos una, A o B, no es una variable; si ambas son variables, $A = B$ ya es una expresión del lenguaje de la Teoría de Conjuntos. No obstante, (20) sigue siendo verdadera, como muestra el Axioma de Extensionalidad.

Para terminar, el caso en que $\{x : \varphi(x)\}$ precede a $\in$ de define como sigue:

$$\{x : \varphi(x)\} \in B \longleftrightarrow \exists y \left(y = \{x : \varphi(x)\} \wedge y \in B\right).$$

Así, $\{x : \varphi(x)\} \in B$ no puede ser verdadero a menos que $\{x : \varphi(x)\}$ sea conjunto. Esto es lo que esperíamos; todo miembro de una clase es un conjunto.

Un aspecto técnico debe ser tomado en cuenta. Como $=$ ha sido definida entre términos mas que ser usada como símbolo lógico, sus propiedades deben ser demostrabas en vez de usarlas como si ya estuvieran garantizadas por los axiomas lógicos. Estas prueba son un poco tediosas pero sin dificultades; solamente hacen uso del Axioma de Extensionalidad.

Una clase útil es la clase de todos los conjuntos, definida como

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\}.$$

Observe que $A \in \mathbf{V}$ es una forma de decir que A es un conjunto. En particular, $\{x : \varphi(x)\} \in \mathbf{V}$ puede desplazar a nuestra notación previa $\text{Conj}\{x : \varphi(x)\}$.

[18]Un término representará a un conjunto arbitrario o a una clase.

Es necesario hacer una advertencia. Ahora podemos hacer uso de $\{x : \varphi(x)\}$ sin demostrar con antelación que es un conjunto. Por tal hecho, pagamos el precio de no ser posible concluir que $\psi(\{x : \varphi(x)\})$, aún cuando ya hayamos demostrado que $\forall y\, \psi(y)$. Ya que $\forall y$ significa para todo *conjunto* y, debemos mostrar primero que $\{x : \varphi(x)\}$ es un conjunto.

Al definir operaciones y nociones en la Teoría de Conjuntos, naturalmente se extienden a clases. Así las cosas, podemos definir

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Sin embargo, hay algunas precauciones que debemos considerar. Podemos definir $\{A\} = \{x : x = A\}$; pero si A es una clase propia, entonces $\{A\}$ es el conjunto vacío (ya que ningún conjunto es igual a A).

Si estamos manejando clases, lo común es permitir que las clases y relaciones sean clases (en lugar de conjuntos) de pares ordenados[19]. En particular, las operaciones de la Teoría de Conjuntos (tal como se aplican a conjuntos) pueden ser pensadas como funcionales. Por ejemplo, la operación $\cup$ puede verse como la clase de todos los pares ordenados $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle$, con $x = y \cup z$ (Es fácil ver que es una clase propia).

Llegados a este momento, es fácil decir lo que queramos acerca de una clase en particular. Sin embargo, ninguna fórmula de la Teoría de Conjuntos dice nada acerca de todas las clases. Indicamos mediante dos ejemplos porqué esto no es una gran dificultad.

El primer ejemplo es la propiedad más simple de la igualdad: toda clase es igual a sí misma. Para mostrar esto, debemos demostrar $A = A$, para un érmino arbitrario A. Notemos que , por (20), $A = A$ es equivalente a $\forall x\, (x \in A \longleftrightarrow x \in A)$, y esto útimo se sigue de las leyes de la Lógica.

Este ejemplo simple ilustra el procedimiento general. Demostramos que algo es verdadero para todas las clases probando $\varphi(A)$, para caulquier término arbitrario A. Al hacer esto no estamos probando *una* fórmula del lenguaje la Teoría de Conjuntos, sino una infinidad, una por cada término A. Esto suele ser irrelevante, ya que con raras excepciones la prueba es la misma para todas las A.

Las cosas son un poco más complicadas cuando queremos establecer la existencia de una clase. Esto se ilustra cuando tratamos de reformular el teorema 5.6 para hablar de clases, en lugar de operaciones. Sea $\varphi(A,B)$ el resultado de traducir lo siguiente en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos: Si A es una función[20] con dominio $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, entonces B es una función con dominio la clase de todos los ordinales tal que $B(\alpha) = A(\alpha, F \upharpoonright \alpha)$, para toda α. Luego, el teorema en cuestiónqueda expresado intuitivamente como $\forall A\, \exists B\, \varphi(A,B)$. Pero esta no es, de ninguna manera, una fórmula del lenguaje de la Teoría de Conjuntos, ya que términos distintos de variables no pueden aparecer después de los cuantificadores.

[19] En tal caso, les llamamos relaciones y funcionales, respectivamente.
[20] Mas bien funcional.

¿Qué sentido tiene demostrar $\forall A\, \exists B\, \varphi(A,B)$ en **ZFC**? Una exploración de la prueba dada del teorema 5.6 nos da la respuesta. Lo que debemos hacer es mostrar cómo, dado un término A, podemos obtener un término B y después demostrar $\varphi(A,B)$ en **ZFC**.

Tales procedimientos nos posibilitan paramanejar todas las afirmaciones que deseemos hacer acerca de clases. Hay otro procedimiento posible: podemos extender el lenguaje al introducir variables para representar clases y permitir que aparezcan después de los cuantificadores. Esto da una solución mas simple y sencilla al tipo de problemas que hemos discutido. Sin embargo, esto tiene un precio; a mayor notación, mayor es el trabajo por hacer cuando lleguemos a hacer pruebas de independencia. En general, la tendencia actual ha sido apegarse al lenguaje de la Teoría de Conjuntos y usar los métodos descritos en esta sección.

8. Axiomas Nuevos.

El descubrimiento más importante de la Teoría de Conjuntos en años recientes es que muchos de los problemas importantes sin resolver de la Teoría de Conjuntos no pueden ser resueltos desde los axiomas de **ZFC**. Entre esos esta la Hipótesis del Continuo (**CH**) y el Problema de Suslin. Llegamos así a la búsqueda de nuevos axiomas que resuelvan estos problemas. Trataremos de dar una idea al lector de lo que se ha hecho y lo que resta por hacer.

¿Dónde debemos buscar nuevos axiomas? Una idea se sugiere en la sección **4**, donde encontramos dos principios de la forma: Toda *colección* de conjuntos que satisfacen ciertas condiciones es un conjunto. Cuando formulamos tales principios como axiomas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos, sólo podíamos decir que toda *clase* que satisfaga las condiciones era un conjunto. Que ello no sea una trivialidad queda evidenciado por los modelos usados en las pruebas de independencia. En esos modelos, siempre hay un conjunto que pertenece al modelo, pero con un subconjunto[21] que no está en el modelo.

Desafortunadamente, no es fácil trabajar con colecciones que no son clases. Consideremos, por ejemplo, un planteamiento ingenuo: agreguemos variables que representen colecciones arbitrarias. Ahora es fácil escribir axiomas del tipo “toda colección que tenga cierta propiedad es un conjunto”. No podemos usar tales axiomas, empero, hasta que algún axioma nos diga que hay colecciones (hasta tener algún axioma de este estilo). Los axiomas obvios de este tipo son los que establecen que ‘cada clase es una colección”. Al introducir tales axiomas estamos en la posición en la que comenzamos.

Una mejor idea es introducir símbolos al lenguaje para nuevas operaciones entre conjuntos, de forma que hayan mas colecciones de la forma $\{x : \varphi(x)\}$. Por supuesto que tales operaciones deben ser genuinamente nuevas; ie., no deben ser definibles en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Hasta ahora,

[21] Estrictamente hablando, debemos llamarla una sublase.

conocemos muy pocas de esas operaciones, e introducir las conocidas no resuelve ninguno de los problemas abiertos de la Teoría de Conjuntos. Así las cosas, en este momento no podemos ir más allá con este enfoque.

La solución de hacer uso de colecciones arbitrarias puede residir en una forma distinta. Si $\varphi(x)$ es una fórmula en un lenguaje razonable, podemos pensar que $\varphi(x)$ nos provee una regla para determinar que conjuntos estan en $\{x : \varphi(x)\}$. Ahora, como fue notado en la discusión sobre el Axioma de Elecció, no hay razón por la que una colección deba tener tal regla. Si pudieramos avanzar más lejos en el análisis de la noción de una colección no formada de acuerdo a una regla, podríamos llegar a axiomas distintos al Axioma de Elección que hagan uso de tales colecciones, o al menos encontrar argumentos mas convincentes para evidenciar la necesidad del Axioma de Elección.

Hay otra aproximación para encontrar nuevos axiomas que han sido más exitosos. Recordemos que en la sección **3** formulamos un principio vago sobre la existencia de etapas e inferimos tres principios precisos de ellas. Si podemos dedudir otros principios principios, esperariamos obtener nuevos axiomas.

Los principios imprecisos aseguran la existencia de etapas que estan después de muchas otras etapas. Así que en vista de la identificación hecha en la sección **5**, podemos esperar que los nuevos axiomas establezcan que hay ordinales que son muy grandes. Ya que tales ordinales generalmente producen cardinales, tales axiomas se conocen como *axiomas de cardinales grandes*. Se ha hecho bastante con tales axiomas; sólo vamos a indicar la dirección que este trabajo ha tomado. Para mayor información, revisar la sección **7** del capítulo **B.3** y su apéndice.

Sea **S** la colección de todas las etapas que pueden obtenerse mediante los tres principios (precisos) de la sección **3**. Claramente el principio (preciso) nuevo más débil sería: hay una etapa que esta después de toda etapa en **S**. Para justificar esto con nuestro principio ingenuo, debemos permitirnos imaginar una situación en la que todas las etapas en **S** estes completas, i.e., en el que los tres principios de la sección **3** no nos lleven a una nueva etapa. Sin anlgún tipo de análisis adicional, no es claro cuando podemos hacer esto (así es que empezamos a evidenciar lo débil que es nuestro principio ingenuo). Sin embargo, nos permitiremos suponer que nuestra imaginación aún es lo bastante potente como para lidiar con este reto, y vamos a ver que nuevos axiomas resultan.

Nuestro axioma debe establecer que hay un α tan grande que, si los tres principios de la sección **3** se aplican a los ordinales anteriores a α y a los conjuntos formados antes de α, los ordinales resultantes son menores que α. Por el tercer principio, esto significa que si $x \in R(\alpha)$ y si f es un mapeo de x en α, entonces $\bigcup Ran(f) < \alpha$ (ver Teorema 5.5). Ahora, si suponemos que $\omega < \alpha$, entonces $\omega \in R(\alpha)$; lo que implica que si y es un conjunto contable de ordinales menores a α, entonces $\bigcup y < \alpha$. De lo anterior se deduce que los rpimeros dos principios d ela sección **3** solamente nos producen ordinales menores a α.

Llegamos así a la siguiente definición: α es *inaccesible* si y sólo si $\omega < \alpha$ y si siempre que f es un mapeo de un conjunto en $R(\alpha)$, se tiene que $\bigcup Ran(f) < \alpha$. Es fácil ver que todo ordinal inaccesible es un cardinal, y que nuestra definición de cardinal inaccesible es equivalente a la usual.

Nuestro primer axioma acerca de cardinales grandes establece que hay un cardinal inaccesible. Lo primero por hacer es mostrar que este es realmente un nuevo axioma, i.e., que no es demostrable en **ZFC**. Haremos un bosquejo de lo que se debe hacer.

Lo que necesitamos es un modelo de **ZFC** en que el nuevo axioma sea falso. Ahora, si no hay cardinales inaccesibles, la clase de todos los conjuntos proporciona un modelo requerido[22]. Supongamos que α es el menor de tales cardinales. Como α y $R(\alpha)$ satisfacen los tres principios de la sección **3**, intuimos que $R(\alpha)$ es un modelo de **ZFC**. De hecho, este es el caso; la demostración de tal hecho nos remite de inmediato a nuestra deducción de los axiomas de **ZFC** a partir de los principios de la seciión **3**. Que el nuevo axioma falle en $R(\alpha)$ se sigue (con algo de trabajo) de el hecho que no hay un cardinal inaccesible en $R(\alpha)$.

¿Tiene el nuevo axioma alguna consecuencia interesante? Hay al menos una. Un teorema famoso de Gödel dice que la consistencia de **ZFC** no puede ser demostrada en **ZFC**. La consistencia puede ser probada desde el nuevo axioma, El hecho crucial ya ha sido establecido: si α es inaccesible, entonces $R(\alpha)$ es modelo de **ZFC**. Una vez obtenido un modelo de **ZFC**, es inmediato demostrar que **ZFC** es consistente[23].

Por otra parte, nuestro nuevo axioma no contribuye en nada para resolver los problemas abiertos mencionados al inicio de esta sección; la prueba de independencia permanece correcta cuando introducimos el axioma nuevo. Así que debemos buscar axiomas más poderosos acerca de cardinales grandes.

Vamos a considerar uno de tales axiomas, el que establece que existe un cardinal medible. No daremos la definición exacta de *cardinal medible*. Basta con decir que nada de lo que dice la definición sugiere que un cardinal medible necesariamente deba ser grande. Sin embargo, podemos probar que los cardinales medibles son inaccesibles y que son, en cierto sentido, mas grandes que los cardinales inaccesibles. Por ejemplo, si α es un cardinal medible, entonces hay α cardinales inaccesibles menores que α.

En realidad, lo que queremos hacer (pero que estamos imposibilitados para ello, por ahora) es reformular la definición de cardinal medible y presentarla en una expresión como esta: α es medible si y sólo si α y $R(\alpha)$ son cerrados bajo ciertas operaciones. Entonces, podríamos intentar justificar la existencia de cardinales medibles imaginando una situación en la que estas operaciones no produzcan nuevos ordinales.

Así las cosas, vemos que hay muchas menos razones para creen en la exis-

[22]Un modelo interno, para ser más precisos.

[23]No estamos diciendo que **ZFC** sea consistente, sólo que su consistencia se puede seguir de nuestro nuevo axioma. Para aclarar dudas (como si fuera posible), consute el Teorema de Correctud-Completud.

tencia de cardinales medibles que en la existencia de cardinales inaccesibles. Sim embargo, tal suposición resuelve varios problemas interesantes de la Teoría de Conjuntos. Mencionamos un resultado de gran interés matmático. Si hay un cardinal medible, entonces todo conjunto de números reales, que sea la imagen continua del complemento de una imagen continua de un boreliano, es medible. Es realmente sorprendente que la existencia de un cardinal grande implique la mesurabilidad de un conjunto de números reales.

Hacemos mención aquí de un axioma mas (que no es acerca de cardinales grandes); el Axioma de Determinación Proyectiva. Este axioma resuelve una cantidad mucho mayor de problemas de los que resuelve la existencia de un cardinal medible. Por otro lado, no hay razón para creer que este axioma es verdadero, excepto que es un axioma elegante con consecuencias interesantes.

De esta manera, vemos que a mayor cantidad de problemas que resuelva un axioma nuevo, menos razones hay para creer en él. Sin embargo, aún no tenemos buenos axiomas que resuelvan el problema más importante sin resolver, **CH**. Por tanto, estamos muy lejos del propósito de resolver nuestros problemas por medio de nuevos axiomas. No obstante, no hay porque esanimarnos. Si el análisis, muy elemental, hecho en la sección **3** nos lleva hasta donde lo hizo, hay razón para esperar que un análisis más profundo nos conduzca a nuevos axiomas con consecuencias profundas.