TAREA 1

Bueno, ha llegado un momento triste :(

Ejercicio 1. Muestre que OR es una clase inductiva.

Ejercicio 2. Sea A una clase no vacía de ordinales. Demuestre lo siguiente:

1.– $\bigcap A \in OR$.

2.– $\bigcap A = \text{ínf}_{\in} A = \text{mín}_{\in} A$. ¡OJO! Hay que probar tres cosas:

i) $\forall \alpha \in A \left(\bigcap A \leq \alpha\right)$.

ii) $\forall \beta \in A \Big(\forall \alpha \in A \left(\beta \leq \alpha\right) \longrightarrow \beta \leq \bigcap A\Big)$.

iii) $\bigcap A \in A$.

Ejercicio 3. Demuestre que LIM es confinal en OR. Es decir

$$\forall \alpha \exists \beta \Big(\alpha < \beta \ \& \ \beta \in LIM\Big).$$

Ejercicio 4. Demuestre que el 2^o Principio de Inducción implica al 1^o.

Ejercicio 5 (En **ZF$^-$ + AE**). Sean $a, b, c \in \mathscr{V}$ tales que:

- $c \sim_f a \ \& \ c \sim_g b$.
- $\forall i, j \in c \Big(i \neq j \longrightarrow \Big(\big(f(i) \cap f(j) = \emptyset\big) \ \& \ \big(g(i) \cap g(j) = \emptyset\big)\Big)\Big)$.
- $\forall i \in c \Big(f(i) \sim g(i)\Big)$.

Demuestre que $\bigcup a \sim \bigcup b$. ¿Porqué no es necesario **ABF**?
Muestre (esto si es platicadito) en que casos podemos evitar el uso de **AE**.

El siguiente ejercicio está muy padre, nos deja ver que los problemas sin **AE** están en lo más básico. Antes, daremos unas deficiniones analiticosas...

Definición 1. Sean $a \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $s = \langle s_i \rangle_{i \in \omega}$ una sucesión de números reales.

- Definimos la "*bola de radio ε con centro en x*" como

$$B_\varepsilon(x) := \left\{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\right\}$$

- Definimos la "*cerradura de a* como

$$\overline{a} := \left\{r \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{R}^+ \left(B_z(x) \cap a \neq \emptyset\right)\right\}$$

- "$\text{lím}\ (s) = x$" si y sólo si

$$\forall z \Big(z \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \exists n \Big(n \in \omega \ \& \ \forall m \left(n < m \longrightarrow x_m \in B_z(x)\right)\Big)\Big)$$

Ejercicio 6 (En **ZF$^-$**). Sean $a \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$.

a) Con **AE** demuestre que

$$x \in \overline{a} \longleftrightarrow \text{“hay una sucesión } s\text{, de elementos de } a\text{, tal que } \lim(s) = x\text{”}$$

b) Si $a \subseteq \mathbb{Q}$, pruebe el inciso anterior sin usar **AE**.

A partir de aqui ya usamos **ABF** sin problemas.

Axioma (AED). El **A**xioma de **E**lecciones **D**ependientes dice lo siguiente:

> *Para todo conjunto x y toda relación r sobre x, i.e. $r \subseteq x \times x$ que cumpla que*
>
> $$\forall v \in x \exists w \in x \Big(\langle v, w\rangle \in r\Big)$$
>
> *se tiene que hay una sucesión de elementos de x (¿Qué quiere decir esto en* **ZFC***?) $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ tal que* $\forall n \in \omega \big(\langle x_n, x_{n+1}\rangle \in r\big)$.

Ejercicio 7 (AED). Sea A una clase y R una relacional **izquierda limitada**.

Suponga que A no está bien fundada por R. Demuestre que hay una sucesión infinita $\langle a_i\rangle_{i\in\omega}$ de elementos de A, tales que

$$\forall i \in \omega \big(a_{i+1} \; R \; a_i\big).$$ [1]

EXTRA: **AE** $\Longrightarrow$ **AED**.

Ejercicio 8. Pruebe que la funcional $\mathbf{F}'$ dada en la prueba de

$$\mathbf{AEP} \longrightarrow \mathbf{TBO}$$

es sobre a.

¿Recuerdan (¡ja!) que el semestre pasado demostramos que **Zorn** $\Longrightarrow$ **AE** y que nunca probamos el regreso? Bueno, pues pueden checarlo en los libros de la biblio... ¿Ya? Pues ahora vamos a hacerlo CON RECURSIÓN.

Ejercicio 9. Demuestre que **AEP** $\Longrightarrow$ **Zorn**.

Hint: Dado $\langle x, <\rangle \in$ **COPO** *y $a \subseteq x$, considere los conjuntos $\{y \in x : y$ es $<$–cota superior de $a\}$. También vean las notas de* **AEP** $\longrightarrow$ **TBO**.

En el siguiente ejercicio vamos a generalizar la concatenación de dos órdenes parciales.

Ejercicio 10. Sea a un conjunto de conjuntos disjuntos y sea $<_a$ una relación (binaria) sobre a. Para **cada** $x \in a$, sean $<_x$ una relación (binaria) sobre x y $\tau_x := \langle x, <_x\rangle$.

Definimos una relación $\prec$ (¿lo es?) sobre $\bigcup a$ de la siguiente forma:

$$r \prec s \longleftrightarrow \begin{cases} \exists y \in a \big(r, s \in y \;\&\; r <_y s\big) \\ \\ r \in z \;\&\; s \in z' \;\&\; z \neq z' \;\&\; z <_a z' \end{cases}$$

Demuestre:

- $\langle a, <_a\rangle \in \mathbf{COBO} \;\&\; \forall x \in a \big(\langle x, <_x\rangle \in \mathbf{COBO}\big) \longrightarrow \langle \bigcup a, \prec\rangle \in \mathbf{COBO}$. En este caso.... ¿Es isomorfo a un ordinal? ¿A cuál?
- $\langle a, <_a\rangle \in \mathbf{COBF} \;\&\; \forall x \in a \big(\langle x, <_x\rangle \in \mathbf{COBF}\big) \longrightarrow \langle \bigcup a, \prec\rangle \in \mathbf{COBF}$.

[1] ¿Qué dice la contrapositiva?

¿Qué puedes decir de los regresos?

¿Qué pasa si todas las relaciones son de equivalencia sobre sus respectivos conjuntos?

Como normalmente comenzamos con órdenes parciales, al orden así obtenido se le llama *suma ordenada de los órdenes en* a y suele denotarse como $\sum_{x\in a}\langle x,<_x\rangle$.

Ejercicio 11. Sea a un conjunto. Para **cada** $i\in a$, sea $\langle x_i,<_i\rangle\in$ **COPO**. Definimos el *producto directo de los órdenes en* a como $\bigotimes_{i\in a}\langle x_i,<_i\rangle=\langle\prod_{i\in a}x_i,\lessdot\rangle$ donde

$$\langle r_i\rangle_{i\in a}\lessdot\langle s_i\rangle_{i\in a}\iff\forall i\in a\big(r_i<_i s_i\big).$$

- Demuestre que el producto directo es un **COPO**.
- Si los x_i's "son" **COTO**, ¿el producto directo es **COTO**?
- Si los x_i's "son" **COPO**'s completos, ¿el producto directo también lo es?

Ejercicio 12. Demuestre directamente una de las siguientes:

- **Zorn** $\longrightarrow$ **TBO**.
- **Zorn** $\longrightarrow\forall x\,\forall y\big(x\preccurlyeq y\vee y\preccurlyeq x\big)$.

1.1. ¿Alguien quiere ejercicios para escoger?

Ejercicio 13 (Para l@s topologic@s)**.** Busque y explique la demostración de que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es compacto. Limpiela para evitar el uso de elección.

Ejercicio 14 (Para l@s analist@s)**.** De dos pruebas, una con **AE** y otra sin **AE** de la siguiente proposición.

Toda función secuencialmente continua (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) en x es continua en x.

Ejercicio 15 (Para l@s algebraicos@s)**.** Dado un campo k y un e.v V sobre k. Muestre que

Todo subespacio vectorial S de V tiene un complemento lineal S' si y sólo si **AE**.

Ojo: No pedi el clásico "con axioma de elección, todo espacio vectorial tiene base" porque ya todos vieron la prueba en algún momento... Si alguien quiere hace el regreso, siéntase libre de buscarlo y exponerlo.

Ejercicio 16 (Para l@s graffiter@s)**.** El resultado más bonito a este nivel puede ser el resultado de DeBruijn-Erdös (1951).

Ejercicio 17 (Recursión)**.** Suponga que los reales son biyectables a un ordinal. demuestre que Toda función real es la suma de dos funciones $1-1$.

Ejercicio 18 (Recursión, para l@s geómetras)**.** Suponga **TBO**. Hay un subconjunto del plano con exactamente dos puntos en cada línea.