

ORDINALES

Definición₁. x es un (Número) Ordinal syss

- i) x es transitivo y
- ii) $\langle x, \in_x \rangle \in COBO$ (estricto)

Ejemplos:

1. $\forall n \in \omega$ (n es un ordinal).
2. ω es un ordinal.
3. $x \in \omega$ syss x es un ordinal y
todo subconjunto no-vacío de x tiene un elemento \in -máximo

Notación:

- 1) $OR = \{x / x \text{ es un ordinal}\}$
- 2) Usaremos letras griegas minúsculas para denotar ordinales:
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (exempto: $\varepsilon, \omega, \varphi$ y ρ)
- 3) Si φ es una fórmula conjuntista, entonces:
 $\forall \alpha \varphi(\alpha) \Leftrightarrow \forall x [x \in OR \rightarrow \varphi(x)]$
 $\exists \alpha \varphi(\alpha) \Leftrightarrow \exists x [x \in OR \ \& \ \varphi(x)]$

Proposición₁. OR es una clase inductiva, e.d.

- 1) $0 \in OR$
- 2) $\forall \alpha [\alpha^+ \in OR]$

Prueba: Es similar a la que se dió para naturales (directa). †

Así, $0, 1, 2, \dots, \omega, \omega^+, (\omega^+)^+, \dots$ son ordinales.

Proposición₂. Todo subconjunto transitivo de un ordinal, es un ordinal:

$$\forall x \forall \alpha [x \subseteq \alpha \ \& \ x \text{ es transitivo} \rightarrow x \in OR]$$

Prueba: Sean a y α tales que $a \subseteq \alpha$ y a es transitivo. Solo faltaría ver que $\langle a, \in_a \rangle \in COBO$, pero esto es inmediato del hecho de que $\in_a = \in_\alpha \upharpoonright a$. †

Ejemplo 4. $\forall \alpha, \beta [\alpha \cap \beta \in OR]$.

Proposición₃. OR es una clase transitiva (Todo elemento de un ordinal es un ordinal).

$$\forall x, y \left[x \in y \ \& \ y \in OR \rightarrow x \in OR \right]$$

Prueba: Supongamos que $x \in \alpha$, veamos que $x \in OR$. Como α es transitivo, $x \subseteq \alpha$; por la proposición anterior nos basta probar que x es transitivo: Sean pues, y y z tales que $z \in y$ y $y \in x$; por la transitividad de α , tenemos que todos, x, y y z son elementos de α y ya que \in es transitiva en α , tenemos que $z \in x$. †

Veamos ahora el orden que hay entre ordinales. Tenemos que la relacional de pertenencia, \in , para los ordinales es irreflexiva, asimétrica y transitiva, e.d. la \in ordena parcialmente a OR . Antes de ver que lo ordena totalmente, veamos la relación que hay con la contención –al igual que con los números naturales– Lo que sabemos hasta ahora es,

$$\begin{aligned} \alpha \in \beta &\rightarrow \alpha \subsetneq \beta, \\ (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) &\rightarrow \alpha \subseteq \beta \end{aligned}$$

Proposición₄. 1) $\forall \alpha, \beta [\alpha \subsetneq \beta \rightarrow \alpha \in \beta]$
2) $\forall \alpha, \beta [\alpha \subseteq \beta \rightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)]$

Prueba: 2) es inmediata de 1), veamos pues 1): Sean α, β tales que $\alpha \subsetneq \beta$. Así, $\emptyset \neq \beta \setminus \alpha \subseteq \beta$ y como β está bien ordenado por \in , $\beta \setminus \alpha$ tiene un \in -mínimo, digamos γ :

- i) $\gamma \in \beta \setminus \alpha$
- ii) $\forall x \left[x \in \beta \setminus \alpha \rightarrow (\gamma \in x) \vee (\gamma = x) \right]$

Af. $\gamma = \alpha$. Y esto lo haremos por doble contención:

\subseteq] Sea $x \in \gamma$. Por i) y de que β es transitivo, tenemos que $x \in \beta$. Ahora bien, si $x \notin \alpha$, tendríamos, por ii), que $\gamma \in x \vee \gamma = x$, pero esto contradiría el hecho de que \in es asimétrica e irreflexiva en β , por tanto $x \in \alpha$.

\supseteq] Sea $x \in \alpha$. Como $\alpha \subsetneq \beta$, $x \in \beta$. Tenemos pues, que $x, \gamma \in \beta$ y por la tricotomía de \in en β , tenemos que

$$(x \in \gamma) \vee (\gamma = x) \vee (\gamma \in x)$$

pero es imposible que $(\gamma = x)$ o que $(\gamma \in x)$, pues en tales casos, puesto que $x \in \alpha$ y α es transitivo, tendríamos que $\gamma \in \alpha$, lo que contradiría i). Por todo esto, $x \in \gamma$. †

Concretamos esto en el siguiente,

- Corolario₅.** 1) $\alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$
 2) $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)$

Pasemos ahora a ver lo del orden lineal, para ello:

Proposición₆. $\forall \alpha, \beta [(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)]$.

Prueba: Suponer lo contrario nos lleva a un absurdo. Pues si α y β son ordinales que no cumplen la propiedad tendríamos que

$$\left. \begin{array}{l}
 \alpha \not\subseteq \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta \subsetneq \alpha \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \alpha \\
 \text{y} \qquad \qquad \qquad (*)_{5.1} \\
 \beta \not\subseteq \alpha \Rightarrow \alpha \cap \beta \subsetneq \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \beta
 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta \quad \nabla \quad \circ \quad !!!$$

(*) $\alpha \cap \beta \in OR$, **Ejemplo 4**.

†

Corolario₇. OR está totalmente ordenado por \in .

Proposición₈. (*Principio de Minimalidad para OR*).

Toda clase no-vacía de ordinales tiene un elemento minimal respecto a la \in .
 Formalmente,

Sea φ una fórmula conjuntista. Así,

$$\exists \alpha \varphi(\alpha) \rightarrow \exists \beta [\varphi(\beta) \ \& \ \forall \gamma (\gamma \in \beta \rightarrow \neg \varphi(\gamma))]$$

Prueba: Sea $\alpha \in OR$ tal que $\varphi(\alpha)$.

Si es el caso que $\forall \gamma (\gamma \in \alpha \rightarrow \neg \varphi(\gamma))$, no hay nada que probar; α es el buscado.

Supongamos pues, que $\exists \gamma (\gamma \in \alpha \ \& \ \varphi(\gamma))$. Sea $b = \{ \gamma \in \alpha / \varphi(\gamma) \}$ ($b \in V$: por el esquema axiomático de comprensión (**ZF₆**)). Tenemos que $\emptyset \neq b \subsetneq \alpha$. Puesto que \in_α bien ordena a α , b tiene un elemento \in -mínimo, digamos β . Así tenemos:

- i) $\beta \in b$
- ii) $\forall \gamma [\gamma \in \beta \rightarrow \gamma \notin b]$

o equivalentemente:

- i') $\beta \in \alpha \ \& \ \varphi(\beta)$
- ii') $\forall \gamma [\gamma \in \beta \rightarrow (\gamma \notin \alpha) \vee \neg \varphi(\gamma)]$

Ahora bien, observemos que debido a que $\beta \in \alpha$ y a que α es transitivo, si $\gamma \in \beta$, entonces $\gamma \in \alpha$. Y de aqui que ii') se convierte en

$$\forall \gamma [\gamma \in \beta \rightarrow \neg \varphi(\gamma)]$$

aunado esto con i'), tenemos que β es el conjunto buscado.

†

Corolario₉. OR está bien ordenado (en forma estricta) por \in .

Notación: El *orden* entre ordinales lo denotaremos por: $<$ o \leq y queda dado como sigue:

$$\begin{aligned}\alpha < \beta &\Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta \\ \alpha \leq \beta &\Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)\end{aligned}$$

Dos resultados inmediatos son los siguientes.

Corolario₁₀. Todo conjunto transitivo de ordinales, es un ordinal.

Corolario₁₁. (*Paradoja de Burali-Forti*).

$$OR \notin V$$

Prueba: Pues en caso contrario, OR sería un conjunto transitivo (**Proposición**₃) de ordinales y por tanto un ordinal, concluimos que $OR \in OR \nabla !!!$ †
○

Proposición₁₂. *Principio de Inducción para OR (Primera Forma):*

Sea ψ una fórmula conjuntista, así

$$\forall \alpha \left[\forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \psi(\beta)) \rightarrow \psi(\alpha) \right] \rightarrow \forall \alpha \psi(\alpha)$$

Prueba: Tomar la contrapositiva del Principio de Minimalidad, con $\varphi \Leftrightarrow \neg \Psi$ †