Veamos algunas propiedades de los ordinales.

Proposición$_{13}$. Sea a un conjunto de ordinales $(a \subseteq OR)$. Así,

1. $\cup\, a \in OR$. (La unión de un conjunto de ordinales es un ordinal)
2. $\cup\, a = sup_{\leq}\, a$. Es decir:
   - **i**). $\forall \alpha \in a,\ \alpha \leq \cup\, a$ y
   - **ii**). $\forall \beta \left[\forall \alpha \in a(\alpha \leq \beta) \ \rightarrow\ \cup\ a \leq \beta \right]$.

Prueba:
1. La unión de un conjunto de conjuntos transitivos es un conjunto transitivo y el resultado se sigue del **Corolario$_{10}$**.
2. Inmediato de las propiedades de la unión. †

Proposición$_{14}$. Sea A una clase no-vacía de ordinales, $\emptyset \neq \cap\, A \subseteq OR$. Así,

1. $\cap\, A \in OR$
2. $\cap\, A = inf\, A = min\, A$. Es decir:
   - **i**). $\forall \alpha \in A \left(\cap\, A \leq \alpha \right)$
   - **ii**). $\forall \beta \left[\forall \alpha \in A(\beta \leq \alpha) \ \rightarrow\ \beta \leq \cap\, A \right]$
   - **iii**). $\cap\, A \in A$

Prueba: **TAREA**.

Pasemos ahora a ver como trabaja la funcional sucesor $(\_^{+})$ para los ordinales.

Proposición$_{15}$.

1. $\forall \alpha(\alpha^{+} \in OR)$. Así, ${}^{+} \restriction OR : OR \rightarrow OR$.
2. $\neg \exists \alpha(\alpha^{+} = 0)$. Es decir, $0 \notin Im({}^{+} \restriction OR)$.
3. $\forall \alpha(\alpha < \alpha^{+})$.
4. **a**) $\forall \alpha, \beta\, [\alpha < \beta \rightarrow \alpha^{+} \leq \beta]$
   b) $\forall \alpha \neg \exists \beta\, [\alpha < \beta\ \&\ \beta < \alpha^{+}]$

   La sucesor, restringida a OR, nos dá el sucesor inmediato
5. $\forall \alpha, \beta\, [\alpha < \beta \rightarrow \alpha^{+} < \beta^{+}]$: La sucesor, restringida a OR, es monótona
6. $\forall \alpha, \beta\, [\alpha \neq \beta \rightarrow \alpha^{+} \neq \beta^{+}]$: La sucesor, restringida a OR, es inyectiva.

Prueba: **1**. ya se probó; **2**. y **3**. se deben a la definición de sucesor. Veamos **4**.**a**: Supongamos que $\alpha < \beta$, por lo que $\alpha \in \beta$. De esto tenemos, por un lado que $\alpha \subsetneq \beta$ y por otro que, $\{\alpha\} \subseteq \beta$. Así, $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$, es decir, $\alpha^{+} \leq \beta$. **4**.**b**. se sigue de **4**.**a**. Ahora, **5**. se sigue de **4**. y **3**. Finalmente, **6**. también se sigue de **4**. y al considerar la tricotomía del orden $(<)$. †

Definición$_{16}$. Sea $\alpha \in OR$, decimos que

α es *(Un Ordinal) Sucesor* syss $\exists\beta(\beta^+ = \alpha)$

α es *(Un Ordinal) Límite* syss $\alpha \neq 0$ & α no es sucesor.

Ejemplos:

1. Son sucesores: $1, 2, 3, \ldots, n^+$ (con $n \in \omega$) y también lo son: $\omega^+, (\omega^+)^+, ((\omega^+)^+)^+$, en general: $\forall\alpha,\ \alpha^+$ es sucesor.

2. El 0 y ω no son sucesores.

3. ω es límite.

4. El 0 no es límite.

Con estas definiciones tenemos que para un ordinal α, sólamente se cumple uno y solo uno de los siguientes casos:
a) $\alpha = 0$, o
b) α es sucesor , o
c) α es límite.

La existencia de un ordinal límite - a saber ω-, nos la garantiza el axioma de Infinito (**ZF**$_7$), pero ¿hay otros ordinales límites? la respuesta es sí; basados en el Axioma de Fraenkel, el esquema axiomático de sustitución (**ZF**$_8$):

Por el Esquema de Recursión para ω, hay una (única) funcional F tal que:

$$F : \omega \to OR$$

i) $F(0) = \omega$

ii) $\forall n \in \omega,\ F(n^+) = (F(n))^+$

Por **ZF**$_8$, $F[\omega] \in V$ y puesto que es de ordinales, $\cup F[\omega]$ es un ordinal, y no es difícil ver que es un límite, distinto de ω. (A este ordinal, más adelante lo llamaremos $\omega + \omega$ o también $\omega \cdot 2$).

Notación: $LIM = \left\{\alpha\ /\ \alpha \text{ es límite}\right\}$.

La clase de los ordinale límites es propia, el razonamiento que hicimos para encontrar otro distinto de ω, lo podemos generalizar:

Proposición$_{17}$. (LIM es confinal con OR)

$$\forall\alpha\ \exists\beta\left[\alpha < \beta\ \&\ \beta \in LIM\right]$$

Prueba: **TAREA**. †

Corolario$_{18}$. $LIM \notin V$.

Pasemos ahora a ver algunas propiedades de los ordinales límites. La primera es que son cerrados bajo la operación sucesor.

Proposición$_{19}$.

1. $\forall\alpha\left[\alpha \in LIM \rightarrow \forall\beta(\beta < \alpha \rightarrow \beta^{+} < \alpha)\right]$

2. $\forall\alpha\left[\forall\beta(\beta < \alpha \rightarrow \beta^{+} < \alpha) \ \&\ \alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \in LIM\right]$

Prueba:

1.] Supongamos que $\beta < \alpha$. Por la **Proposición$_{15.4}$**, $\beta^{+} \leq \alpha$, Pero si $\alpha \in LIM$, es imposible que $\beta^{+} = \alpha$, por lo tanto $\beta^{+} < \alpha$.

2.] La contrapositiva es inmediata al negar la definición de límite. †

Proposición$_{20}$. $\forall\alpha\left[\alpha \in LIM \leftrightarrow \alpha \text{ es inductivo}\right]$

Prueba: la "ida" es inmediata de la proposición anterior. Veamos el regreso: Supongamos que α es inductivo, así $0 \in \alpha$ y por tanto $\alpha \neq 0$; y como $\forall\beta\,[\beta \in \alpha \rightarrow \beta^{+} \in \alpha]$, α no puede ser sucesor. †

Corolario$_{21}$.ω es el primer límite. En símbolos:

$$\forall\alpha\left[\alpha \in LIM \rightarrow \omega \leq \alpha\right]$$

Veamos ahora como trabaja la unión sobre los límites.

Proposición$_{22}$.

1. $\bigcup 0 = 0$.

2. $\bigcup \alpha^{+} = \alpha$.

3. **a**. $\forall\alpha\left[\alpha \in LIM \rightarrow \bigcup\alpha = \alpha\right]$.

b. $\forall\alpha\left[\cup\,\alpha = \alpha \ \&\ \alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \in LIM\right]$.

Prueba: **1**. y **2**. son inmediatas de las definiciones y propiedades básicas.

3.a.] Puesto que α es transitivo, tenemos que $\cup\,\alpha \subseteq \alpha$. Veamos la otra contención; sea $\beta \in \alpha$, ahora bien, si $\alpha \in LIM$, entonces, por la **Proposición$_{19}$.1**, $\beta^{+} < \alpha$. Tenemos pues, $\beta \in \beta^{+} \in \alpha$, es decir $\beta \in \cup\,\alpha$.

4.b.] Procedamos por contrapositiva: Supongamos que $\alpha \notin LIM$, así $\alpha = 0$ o hay un β tal que $\beta^+ = \alpha$. En el primer caso, ya terminamos; en el otro, $\cup\, \alpha = \cup\, (\beta^+) = \beta < \beta^+ = \alpha$. †

Proposición$_{23}$. *Principio de Inducción para OR (Segunda forma)*.

Sea φ una fórmula conjuntista.

Si

i). $\varphi(0)$,

ii). $\forall a\, [\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\alpha^+)]$ y

iii). $\forall \alpha \in LIM \Big[\forall \beta(\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \;\rightarrow\; \varphi(\alpha) \Big]$,

entonces

$$\forall \alpha\ \varphi(\alpha)$$

Prueba: Supongamos que φ es una fórmula que cumple con **i**), **ii**) y **iii**). Queremos probar que $\forall \alpha\ \varphi(\alpha)$ y para esto usaremos la primera forma del Principio de Inducción. Supongamos pues, que α es un ordinal arbitrario, que cumple con:

$$\forall \beta < \alpha,\ \varphi(\beta) \qquad \text{H.I.}$$

probemos que $\varphi(\alpha)$. Debido a la naturaleza de α, tenemos 3 casos posibles:

$\alpha = 0$] Por **i**), tenemos $\varphi(0)$, es decir $\varphi(\alpha)$.

$\alpha = \beta^+$] Sabemos que $\beta < \beta^+ = \alpha$, por H.I., $\varphi(\beta)$ y ahora por **ii**), tenemos $\varphi(\beta^+)$, es decir $\varphi(\alpha)$.

$\alpha \in LIM$] $\varphi(\alpha)$ se sigue de $(*)$ y **iii**). †