Preliminares a Recursión General

En lo que sigue sean, A una clase, R una relacional y $a \in V$.

Definición₁. El conjunto a es R–*transitivo syss*

$$\forall x,y\left[(x \in a \ \& \ yRx) \to y \in a\right]$$

OjO: a es transitivo syss a es $\in$–transitivo.

Definición₂.

1. $a_R = \left\{w \ / \ wRa \ \& \ w \neq a\right\}$.

(El R–*Segmento Inicial (Propio) determinado por* a)

2. R es *Izquierda Limitada sobre* A syss $\forall x \in A\ [x_R \in V]$.

OjO:

1. a es R–transitivo syss $\forall x \in a\ [x_R \subseteq a]$.
2. Si $a \notin CAMP(R)$, entonces $a_R = \emptyset$

Proposición₃. Si R es izquierda limitada sobre A y $CMP(R) \subseteq A$, entonces para cada conjunto a hay un (único) $b \in V$ tal que

1) $b \supseteq a$
2) b es R–transitivo
3) $\forall c\left[c \supseteq a \ \& \ c \text{ es } R\text{–transitivo} \to c \supseteq b\right]$

Prueba: Por el teorema de recursión para ω, hay una (única) función f, tal que:

$$f : \omega \to V$$

(**i**) $f(0) = a$

(**ii**) $\forall n \in \omega, f(n^+) = \bigcup\left\{x_R \ / \ x \in f(n)\right\}$

en este caso $\bigcup\left\{x_R \ / \ x \in f(n)\right\} \in V$, pues R es izquierda limitada.

Sea $b = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. El conjunto b es el buscado:

1)] $a = f(0) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} f(n) = b$.

2)] Sean u y v tales que uRv y $v \in b$. Hay un $n_0 \in \omega$ tal que $v \in f(n_0)$; ahora, teniendo en cuenta que $u \in v_R$, tenemos que $u \in \bigcup\left\{x_R \ / \ x \in f(n_0)\right\} = f(n_0^+)$ y por tanto $u \in b$.

3)] Sea c un conjunto R–transitivo tal que $c \supseteq a$. Debemos probar que

$$c \supseteq b = \bigcup_{n \in \omega} f(n)$$

que por las propiedades de la unión, basta ver que $\forall n \in \omega\, [c \supseteq f(n)]$ y esto lo haremos por inducción (1a. forma) para ω :

I.] $f(0) = a \subseteq c.$

II.] Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente que $f(n) \subseteq c,$ veamos que $f(n^+) \subseteq c.$ Sea $u \in f(n^+),$ es decir, $u \in \bigcup \left\{ x_R \ / \ x \in f(n) \right\}.$ Hay pues un $v \in f(n)$ tal que $u \in v_R.$ Usando la H.I., tenemos que $v \in c$ y como c es R–transitivo, entonces $v_R \subseteq c$ y por tanto $u \in c.$ †

Notación: Al conjunto b se le llama *la Clausura R–Transitiva de a* y se denotará por $CT_R(a).$ En el caso particular de la relacional $\in$, *la Clausura Transitiva de a* lo pondremos simplemente así, $CT(a).$

Pasamos a dar una noción que antes teníamos para conjuntos ahora para clases en general.

Definición$_4$. Diremos que la relacional R *Bien Funda a* la clase A o que la clase A *está Bien Fundada por* R syss todo subconjunto no–vacío de A tiene un elemento R–minimal:

$$\forall x \subseteq A \left[x \neq \emptyset \ \longrightarrow \ \exists y \in x \, \neg \exists z \left(z \in x \ \ \& \ \ zRy \right) \right]$$

En el caso en que $A = CAMP(R)$ simplemente se dirá que R *está Bien Fundada.*

Observación. Son equivalentes:

i) R Bien Funda a A

ii) $\forall x \subseteq A \left[x \neq \emptyset \ \longrightarrow \ \exists y \in x \ \forall z \left(z \in x \ \longrightarrow \ \neg \left(zRy \right) \right) \right]$

iii) $\forall x \subseteq A \left[x \neq \emptyset \ \longrightarrow \ \exists y \in x \ \forall z \left(zRy \ \longrightarrow \ z \notin x \right) \right]$

iv) $\forall x \subseteq A \left[x \neq \emptyset \ \longrightarrow \ \exists y \in x \left(y_R \cap x \ = \ \emptyset \right) \right]$

Proposición$_5$. Si R bien funda a $A,$ entonces

i) R es irreflexiva en $A,$ e.d. $\forall w \in A \, \neg (wRw)$ y

ii) R es asimétrica en $A,$ e.d. $\forall x,y \in A \left[xRy \ \longrightarrow \ \neg (yRx) \right]$ o $\neg \exists x,y \in A \left[xRy \ \ \& \ \ yRx \right]$

iii) No hay una sucesión finita de elementos de A, digamos $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \rangle$, tales que $a_1 R a_0$, $a_2 R a_1, \ldots$, $a_{n+1} R a_n$, $a_0 R a_{n+1}$

Prueba: Son inmediatas de la definición (**EJERCICIO**). †

Proposición$_6$.

a. Si R bien funda a A, entonces **no** hay una sucesión infinita $\langle a_i \rangle_{i \in \omega}$, de elementos de A, tal que

$$\forall i \in \omega \left[a_{i+1} \;\; r \;\; a_i \right]$$

b. La conversa de la anterior es cierta bajo la suposición del **AED**.

Prueba: **TAREA**. †

OjO: El axioma de buena fundación (**ABF**) es equivalente a que la relacional $\in$ bien funde al universo, V.