Principio de Minimalidad para Relacionales Bien Fundadas PM/RBF

Sea R una relacional con $A = CMP(R)$.

Si R es una relacional bien fundada e izquierda limitada sobre $A.$ Así,

Toda subclase no vacía de A tiene un elemento R–minimal, e.d.

$$\emptyset \neq B \subseteq A \rightarrow \exists y \in B\ \forall z \in B\big(\neg\, zRy\big)$$

o equivalentemente, si $\Psi(x)$ es una fórmula conjuntista, entonces

$$\exists x \in A\,\Psi(x) \rightarrow \exists y \in A\Big[\,\Psi(y)\ \ \&\ \ \forall z\big(zRy \rightarrow \neg\,\Psi(z)\big)\,\Big]$$

Prueba:

Supongamos que hay un $x_0 \in A$ tal que $\Psi(x_0)$.
Si $\forall z\big(zRx_0 \rightarrow \neg\,\Psi(z)\big)$, no hay nada que probar. Supongamos pues, que

$$\exists z\Big[\,zRx_0\ \ \&\ \ \Psi(z)\,\Big] \qquad (*)$$

Consideremos a $a = CT_R(\{x_0\})$ (R es izquierda limitada sobre A) y sea

$$b = \Big\{z \in a\ \ /\ \ \Psi(z)\Big\}$$

tenemos que $\emptyset \neq b \subseteq A$ (pues $x_0 \in b$). Así, hay un elemento, y_0, R–minimal en b. Es decir:

(1) $y_0 \in b$ y

(2) $\forall z\Big(zRy_0\ \rightarrow\ z \notin b\Big)$

Veamos que y_0 es el conjunto buscado. En efecto,

(i) $\Psi(y_0)$: Por (1). Y

(ii) $\forall z\Big(zRy_0\ \rightarrow\ \neg\Psi(z)\Big)$: Pues supongamos que $zRy_0.$ Por (2), tenemos que $z \notin b$, y debido a la definición de b, tenemos que o $z \notin a$ o $\neg\Psi(z).$ Pero ya que, $y_0 \in a$ (por (1)), a es R-transitivo y zRy_0 tenemos que $z \in a.$ Concluimos que, $\neg\Psi(z)$. †

Principio de Inducción para Relacionales Bien Fundadas PI/RBF

Sean R una relacional bien fundada e izquierda limitada sobre A y $\chi(x)$ una fórmula conjuntista, entonces

$$\forall y \in A\left[\forall z(zRy \rightarrow \chi(z)) \rightarrow \chi(y)\right] \rightarrow \forall x \in A\, \chi(x)$$

Prueba: En el PM/RBF tomar $\Psi(x) \leftrightharpoons \neg\chi(x)$ y posteriormente la contrapositiva. †

Algunos comentarios:

La Relacional $\in$ es izquierda limitada (pues $a_{\in} = \left\{x \;/\; x \in a\right\} = a$).

Puesto que el **A**xioma de **B**uena **F**undación (**ABF**) no es mas que una reformulación de la afirmación: la $\in$ bien funda a V, tenemos que bajo esta suposición, es cierto el siguiente principio:

Sea ψ una fórmula conjuntista. Así

$$\forall x\left[\forall y\left(y \in x \rightarrow \psi(y) \right) \rightarrow \psi(x)\right] \rightarrow \forall x\, \psi(x)$$

es decir: *todos los conjuntos tienen una propiedad, siempre que uno arbitrario la tenga, bajo la suposición de que todos sus elementos la tengan.* Al cual bien podríamos llamar $\in$-**Inducción**.

También, bajo la suposición del **ABF**, tenemos lo correspondiente al principio de mimimalidad:

$$\exists x\, \Psi(x) \rightarrow \exists y\left[\Psi(y) \;\&\; \forall z\left(z \in y \rightarrow \neg\, \Psi(z)\right)\right]$$

El cual es una forma fuerte de dicho axioma.