Esquema General de Recursión para Relacionales Bien Fundadas

Proposición (**EGR**/**RBF**). Sea R una Relacional Bien Fundada e Izquierda Limitada sobre A, su campo, y sea $G : V \to V$. Así:
Existe una única funcional F, tal que

$$F : A \to V$$
$$\forall x \in A, \quad F(x) = G(F \upharpoonright x_R)$$

Prueba:

$\leq\,]$ Sean F_1 y F_2 funcionales que cumplen:

1. $DOM(F_1) = A = DOM(F_2)$ y

2. $\forall x \in A,\ F_1(x) = G(F_1 \upharpoonright x_R)$ (*)
$\forall y \in A,\ F_2(y) = G(F_2 \upharpoonright y_R)$ (**)

Para ver que $F_1 = F_2$, basta probar que $\forall z \in A,\ F_1(z) = F_2(z)$ y esto lo haremos usando el PI/RBF. Sea pues $z \in A$. Supongamos inductivamente (HI) que $\forall w\,[wRz \to F_1(w) = F_2(w)]$. Lo cual nos dice que $F_1 \upharpoonright z_R = F_2 \upharpoonright z_R\ (+)$. Así:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= G(F_1 \upharpoonright z_R) && (*) \\ &= G(F_2 \upharpoonright z_R) && G \text{ es funcional y } (+) \\ &= F_2(z) && (**) \end{aligned}$$

†

$\geq\,]$ Diremos que g es una *(Función) Adecuada* syss

(**1**) $g \in FNC$ y $DOM(g) \subseteq A$,

(**2**) $DOM(g)$ es R–transitivo y

(**3**) $\forall x \in DOM(g) \left[g(x) = G(g \upharpoonright x_R) \right]$

Sean $\mathcal{A} = \left\{ g \ /\ g \text{ es una adecuada} \right\}$ y $F = \bigcup \mathcal{A}$.

Afirmación$_1$. Cualquier par de funciones adecuadas son compatibles
Afirmación$_2$. $\forall x \in A\ \exists g \in \mathcal{A}[x \in DOM(g)]$.
Afirmación$_3$. F es una funcional con $DOM(F) = A$.
Afirmación$_4$. $\forall x \in A,\ F(x) = G(F \upharpoonright x_R)$.

Prueba de Afirmación$_1$:

Sean $g,\ h \in \mathcal{A},$ veamos que son compatibles, e.d.

$$\forall x \in (DOM(g) \cap DOM(h))\Big[\, g(x) \;=\; h(x)\,\Big]$$

Sea $a = DOM(g) \cap DOM(h).$ Por (**2**), a es R–transitivo. Sea
$b = \Big\{x \in a \;\;/\;\; g(x) \neq h(x)\Big\}.$
Si $b = \emptyset,$ habríamos terminado. Veamos que el otro caso es imposible.
Supongamos pues, lo contrario. Tenemos que, $\emptyset \neq b \subseteq a \subseteq A.$ Así, b tiene un elemento R–minimal, digamos $p,$ el cual cumple:

i) $p \in b$ y

ii) $\forall x\Big[\, xRp \;\rightarrow\; x \notin b \,\Big]$

equivalentemente:

i') $p \in a \;\&\; g(p) \neq h(p)$ y

ii') $\forall x\Big[\, xRp \;\rightarrow\; \big(\, x \notin a \vee g(x) = h(x) \,\big) \Big]$

Ahora bien, puesto que a es R–transitivo y de que $p \in a,$ ii') se convierte en:

ii'') $\forall x\Big[\, xRp \;\rightarrow\; g(x) = h(x) \,\Big]$

o lo que es lo mismo:

$$g \restriction p_R = h \restriction p_R$$

pero entonces, de esto, de (**3**) y de que G es funcional, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= G(g \restriction p_R) \\ &= G(h \restriction p_R) \\ &= h(p) \qquad \nabla \text{ !!! a i').} \end{aligned}$$

por tanto $b = \emptyset$ y de aqui que g y h son compatibles. †

Este resultado nos dice que cualquier colección de funciones adecuadas, digamos $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, forman un sistema compatible de funciones y con esto tenemos que $\cup\mathcal{B}$ es una funcional, cuyo dominio, siendo la unión de los dominios de las funciones de $\mathcal{B}$, resulta ser la unión de conjuntos R–transitivos y por tanto éste también es R–transitivo. Además el valor que toma la funcional en un punto de su dominio es el que toma cualquiera de la clase –con tal de que dicho punto esté en el dominio de ésta– y por tanto cumpliría también, la propiedad (**3**). Veamos esto último con detalle.

Recordemos que

$$\forall x,y \left[\cup\mathcal{B}(x) = y \leftrightarrow \exists g \in \mathcal{B} \left(g(x) = y \right) \right]$$

Sea pues, $x \in DOM(\cup\mathcal{B})$. Hay una $g \in \mathcal{B} \subseteq A$ tal que $x \in DOM(g)$, por lo que $\cup\mathcal{B}(x) = g(x)$. Por otro lado, el $DOM(g)$ es R–transitivo, por tanto $x_R \subseteq DOM(g)$, y como $DOM(g) \subseteq DOM(\cup\mathcal{B})$, tenemos que $g \upharpoonright x_R = \cup\mathcal{B} \upharpoonright x_R$. Con esto y del hecho de que G es funcional, tenemos:

$$\begin{aligned} \cup\mathcal{B}(x) &= g(x) \\ &= G(g \upharpoonright x_R) \\ &= G(\cup\mathcal{B} \upharpoonright x_R). \end{aligned}$$ †

Resumimos esto en la siguiente,

NOTA: Para cualquier clase $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, se tiene:

i). $\cup\mathcal{B}$ es una funcional y $DOM(\cup\mathcal{B}) \subseteq A$

ii). $DOM(\cup\mathcal{B})$ es R–transitivo

iii). $\forall x \in DOM(\cup\mathcal{B}) \left[\cup\mathcal{B}(x) = G(\cup\mathcal{B} \upharpoonright x_R) \right]$

Prueba de Afirmación$_2$:

Usaremos el PI/RBF. Sea pues, $p \in A.$ Supongamos inductivamente (H.I.), que

$$\forall y\left[\, yRp \ \rightarrow\ \exists h \in \mathcal{A}\ (y \in DOM(h))\,\right]$$

P.D. $\exists g \in \mathcal{A}\ [p \in DOM(g)]$.

Sean $a = CT_R(\{p\}),\ \mathcal{B} = \left\{h \in \mathcal{A}\ /\ DOM(h) \subseteq a\right\}$ y $g^* = \bigcup \mathcal{B}$

Af$_{2.1}$. g^* es adecuada.

Pba: Debido a la **NOTA**, basta ver que $g^* \in FNC$ y esto se debe al hecho,

$$DOM(g^*) = \bigcup_{h \in \mathcal{B}} DOM(h) \subseteq a$$

Af$_{2.2}$. $p_R \subseteq DOM(g^*)$.

Pba: Veamos que $\forall x\ [xRp \rightarrow x \in DOM(g^*)]$. Supongamos, pues, que qRp. Por H.I. hay $h' \in \mathcal{A}$ tal que $q \in DOM(h')$ –obsérvese que no necesariamente, $DOM(h') \subseteq a$. Sea $h = h' \upharpoonright a$. Tenemos que $h \in \mathcal{A}$. Pues, $h \in FUN$ con $DOM(h) = DOM(h') \cap a \subseteq A$, con lo cual cumple con (**1**); el $DOM(h')$ es R–transitivo, ya que es la intersección de dos que lo son, cumpliendo (**2**), y h cumple (**3**) pues h y h' tienen la misma regla. Con esto tenemos que $h \in \mathcal{B}$ y $q \in DOM(h') \cap a = DOM(h)$. Finalmente, $q \in DOM(g^*)$.

Sea $g = g^* \cup \left\{\left\langle p\ ,\ g^* \upharpoonright p_R\right\rangle\right\}$. Veamos que ésta nos funciona.

Af$_{2.3}$. $g \in \mathcal{A}$ y $p \in DOM(g)$.

Pba: Esto último es inmediato de la definición de g. Ahora bien, $g \in \mathcal{A}$ pues:

(**1**) $g \in FUN$ ya que es la unión de dos funciones compatibles. Y

$$DOM(g) = DOM(g^*) \cup \{p\} \subseteq a \subseteq A$$

(**2**) $DOM(g)$ es R-transitivo: pues sea $x \in DOM(g)$. Tenemos dos casos: si $x \in DOM(g^*)$, el $DOM(g^*)$ es R-transitivo y por tanto $x_R \subseteq DOM(g^*)$. En el otro caso tenemos que $x = p$ y la **Af**$_{2.2}$ nos dá que $x_R = p_R \subseteq DOM(g^*)$. En ambos casos tenemos que $x_R \subseteq DOM(g)$.

(**3**) $\forall x \in DOM(g)\ [g(x) = G(g \upharpoonright x_R)]$. Esto es inmediato de la definición de g. †

Prueba de Afirmación$_3$:

Como $F = \bigcup \mathcal{A}$, debido a la **NOTA** anterior, basta ver que $A \subseteq \bigcup_{g \in \mathcal{A}} DOM(g)$, pero esto es inmediato de la **Af**$_2$.

Pba. **Afirmación**$_4$:

Inmediata de la **NOTA**. †

Para escépticos:

La prueba anterior nos da una definición explícita de F :

$$
\begin{aligned}
& F(x) = y \\
\leftrightarrow\ & \exists f\, [f \in \mathcal{A} \ \&\ x \in DOM(f) \ \&\ f(x) = y] \\
\leftrightarrow\ & \exists f \left[\begin{array}{l} f \in FNC \quad \& \quad DOM(f) \subseteq CAM(R) \quad \& \quad DOM(f) \text{ es } R\text{–transitivo} \quad \& \\ x \in DOM(f) \quad \& \quad f(x) = y \end{array} \right] \\
\leftrightarrow\ & \exists f \left[\begin{array}{l} f \in FNC \quad \& \quad DOM(f) \subseteq CAM(R) \quad \& \\ \forall u\, \forall v \left[vRu \ \&\ u \in DOM(f) \ \rightarrow\ v \in DOM(f) \right] \quad \& \\ x \in DOM(f) \quad \& \quad f(x) = y \end{array} \right]
\end{aligned}
$$