

## Esquema General de Recursión para Ordinales

Sabemos que la  $\in_{OR}$  bien funda a  $OR$  – de hecho lo bien ordena – además, para todo  $\alpha \in OR$ , se tiene que  $\alpha_{\in_{OR}} = \alpha \in V$ , es decir la  $\in_{OR}$  es izquierda limitada. Con esto tenemos que la  $\in_{OR}$  cumple con las hipótesis del esquema general de recursión para relacionales bien fundadas. Así, podemos enunciar la siguiente,

**Proposición (EGR/OR–Primera forma).** Para cada  $G : V \rightarrow V$ , existe una única funcional  $F$ , tal que

$$F : OR \rightarrow V$$

$$\forall \alpha, F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

Hay otra forma para para este resultado.

**Proposición (EGR/OR-Segunda Forma).** Sean  $a \in V$ ,  $H : V \rightarrow V$  y  $J : V \rightarrow V$ . Así, existe una única funcional  $F$ , tal que:

$$F : OR \rightarrow V$$

- I.  $F(0) = a$
- II.  $\forall \alpha, F(\alpha^+) = H(F(\alpha))$
- III.  $\forall \alpha \in LIM, F(\alpha) = J(F[\alpha])$

**Prueba:** Vamos a reducir este resultado al anterior. Para ello definimos el funcional  $G$  como sigue:

$$\langle x, y \rangle \in G \leftrightarrow G(x) = y$$

$$\leftrightarrow \left[ x = 0 \ \& \ y = a \right] \vee$$

$$\vee \left[ x \in FNC \ \& \ \exists \alpha \left( DOM(x) = \alpha^+ \ \& \ y = H(x(\alpha)) \right) \right] \vee$$

$$\vee \left[ x \in FNC \ \& \ \exists \alpha \left( \alpha \in LIM \ \& \ DOM(x) = \alpha \ \& \ y = J(x[\alpha]) \right) \right] \vee$$

$$\vee \left[ \left( \left( x \in FNC \ \& \ DOM(x) \notin OR \right) \vee x \notin FNC \right) \ \& \ y = 0 \right]$$

Por la proposición anterior, hay una funcional  $F$ , tal que para todo ordinal  $\alpha$ ,

$$F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

pero entonces:

- I.  $F(0) = G(F \upharpoonright 0) = G(0) = a,$

- II.  $F(\alpha^+) = G(F \upharpoonright \alpha^+) = H(F(\alpha))$  y
- III. Si  $\alpha \in LIM$ , entonces  $F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha) = J(F[\alpha])$ .

Con esto hemos probado la existencia de una funcional que cumpla con lo requerido, falta ver que ésta es única.

Supongamos pues que hay otra funcional, digamos  $F'$ , cuyo dominio fueran los ordinales y la cual cumple con I, II y III. Tenemos que probar que  $F = F'$  y para esto basta ver que tienen la misma regla, es decir  $\forall \alpha [F(\alpha) = F'(\alpha)]$ .

Una prueba trivial para ello nos lo proporciona la segunda forma del Principio de Inducción para Ordinales. †