

## Aritmética Ordinal

Algunas aplicaciones del Esquema General de Recusión para los ORDinales en su segunda forma, son, por ejemplo, las que nos permiten definir las operaciones básicas de la aritmética ordinal.

+) Sea  $\alpha$  un ordinal cualquiera, definimos recursivamente sobre todos los ordinales, la tabla de sumar (por la izquierda) con  $\alpha$ , denotado por  $\Sigma_\alpha$ , como sigue:

$$\Sigma_\alpha : OR \rightarrow OR$$

- I.  $\Sigma_\alpha(0) = \alpha$
- II.  $\forall \beta, \Sigma_\alpha(\beta^+) = (\Sigma_\alpha(\beta))^+$
- III.  $\forall \beta \in LIM, \Sigma_\alpha(\beta) = \bigcup \{ \Sigma_\alpha(\gamma) \mid \gamma < \beta \}$

Para ver que está bien definida  $\Sigma_\alpha$ , basta ver que se cumplen las hipótesis del teorema. En este caso tomamos como  $a = \alpha$ , como  $H$  la funcional sucesor  $(\_ )^+$  y como  $J = \cup$ .

Ahora, podemos definir la suma entre ordinales como sigue:

$$+ : OR \times OR \rightarrow OR$$

$$\forall \alpha, \beta, \quad +(\alpha, \beta) = \Sigma_\alpha(\beta)$$

Como siempre,  $\alpha + \beta \Leftrightarrow +(\alpha, \beta)$ .

Así, si  $\alpha, \beta \in OR$  y  $\gamma \in LIM$ , entonces:

- i).  $\alpha + 0 = \alpha$
- ii).  $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$
- iii).  $\alpha + \gamma = \bigcup \{ \alpha + \xi \mid \xi \in \gamma \}$

Algunos casos interesantes son:

**1.**  $\alpha + 0 = \alpha$  (por definición) y  $0 + \alpha = \alpha$  (por el PI/OR 2a. forma)  
El cero es el neutro aditivo.

**2.** La suma entre ordinales restringida a  $\omega \times \omega$ , coincide con la suma entre naturales.

**3.**  $\alpha + 1 = \alpha^+$ , para toda  $\alpha$ , pero  $1 + \omega = \bigcup \{ 1 + n \mid n \in \omega \} = \omega$ .  
La suma ordinal, *NO es conmutativa*.

**4.**  $1 + \omega = \omega = 2 + \omega$ .  
La ley de cancelación para la suma por la izquierda, *NO es cierta*.

$$5. \omega + \omega = \bigcup \{ \omega + n \mid n \in \omega \} > \omega.$$

$$6. \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

La suma ordinal es asociativa.

•) Sea  $\alpha$  un ordinal cualquiera, definimos recursivamente sobre todos los ordinales, la tabla de multiplicar (por la izquierda) por  $\alpha$ , denotado por  $\Pi_\alpha$ , como sigue:

$$\Pi_\alpha : OR \rightarrow OR$$

- I.  $\Pi_\alpha(0) = 0$
- II.  $\forall \beta, \Pi_\alpha(\beta^+) = \Pi_\alpha(\beta) + \alpha$
- III.  $\forall \beta \in LIM, \Pi_\alpha(\beta) = \bigcup \{ \Pi_\alpha(\gamma) \mid \gamma < \beta \}$

Para ver que está bien definida  $\Pi_\alpha$ , basta ver que se cumplen las hipótesis del teorema. En este caso tomamos como  $a = 0$ , como  $H$  la funcional sumar  $\alpha$  por la derecha, es decir  $H(x) = x + \alpha$  y como  $J = \bigcup$ .

Ahora, podemos definir el producto, entre ordinales, como sigue:

$$\cdot : OR \times OR \rightarrow OR$$

$$\forall \alpha, \beta, \cdot(\alpha, \beta) = \Pi_\alpha(\beta)$$

Como siempre,  $\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \cdot(\alpha, \beta)$ .

Así, si  $\alpha, \beta \in OR$  y  $\gamma \in LIM$ , entonces:

- i).  $\alpha \cdot 0 = 0$
- ii).  $\alpha \cdot \beta^+ = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- iii).  $\alpha \cdot \gamma = \bigcup \{ \alpha \cdot \xi \mid \xi \in \gamma \}$

Algunos casos interesantes son:

1.  $\alpha \cdot 0 = 0$  y  $0 \cdot \alpha = 0$
2.  $\alpha \cdot 1 = \alpha \cdot 0 + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$  y  
 $1 \cdot \alpha = \alpha$  -por el PI/OR 2a. forma-  
 El 1 es el neutro multiplicativo.
3. El producto entre ordinales restringida a  $\omega \times \omega$ , coincide con el producto entre naturales.
4.  $\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega$ .  
 Pero,  $2 \cdot \omega = \bigcup \{ 2 \cdot n \mid n \in \omega \} = \omega$ .  
 El producto entre ordinales, **NO conmuta**.
5.  $2 \cdot \omega = \omega = 3 \cdot \omega$ .

No vale la *ley de cancelación por la derecha* para el producto.

$$6. \omega \cdot \omega = \bigcup \{ \omega \cdot n \mid n \in \omega \} > \omega.$$

$$7. \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \text{ (El producto es asociativo).}$$

$$8. \alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma) \text{ (El producto distribuye a la suma).}$$

E) Sea  $\alpha$  un ordinal cualquiera, definimos recursivamente sobre todos los ordinales, la exponenciación con base  $\alpha$ , denotado por  $E_\alpha$ , como sigue:

$$E_\alpha : OR \rightarrow OR$$

$$I. E_\alpha(0) = 1$$

$$II. \forall \beta, E_\alpha(\beta^+) = E_\alpha(\beta) \cdot \alpha$$

$$III. \forall \beta \in LIM, E_\alpha(\beta) = \bigcup \{ E_\alpha(\gamma) \mid \gamma < \beta \}$$

Para ver que está bien definida  $E_\alpha$ , basta ver que se cumplen las hipótesis del esquema de recursión. En este caso tomamos como  $a = 1$ , como  $H$  la funcional multiplicar por  $\alpha$ , por la derecha y como  $J = \bigcup$ .

Ahora, podemos definir la exponenciación, entre ordinales, como sigue: Sea

$$exp : OR \times OR \rightarrow OR$$

$$exp(\alpha, \beta) = E_\alpha(\beta)$$

Como siempre,  $\alpha^\beta \neq exp(\alpha, \beta)$ .

Así, si  $\alpha, \beta \in OR$  y  $\gamma \in LIM$ , entonces:

$$i). \alpha^0 = 1$$

$$ii). \alpha^{\beta^+} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha$$

$$iii). \alpha^\gamma = \bigcup \{ \alpha^\xi \mid \xi \in \gamma \}$$

Algunos casos interesantes son:

1. La exponenciación entre ordinales restringida a  $\omega \times \omega$ , coincide con la exponenciación entre naturales.

2.  $0^0 = 1$  y  
para  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , se tiene  $0^n = 0$ .

$$3. 0^\omega = \bigcup \{ 0^n \mid n \in \omega \} = 1$$

4.  $0^{\beta^+} = 0$ , para cualquier  $\beta$  -usando el PI/OR 2a. forma-

5. Para  $\gamma \in LIM$ , se tiene  $0^\gamma = 1$ .

**6.**  $\alpha^1 = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$  y  
 $1^\alpha = 1$  -usando el **PI/OR** 2a. forma-

**7.**  $2^\omega = \bigcup \{2^n / n \in \omega\} = \omega$  y  
 $n^\omega = \omega$  para  $n \in \omega \setminus \{0\}$ .

**8.**  $\omega^2 = \omega^1 \cdot \omega = \omega \cdot \omega$  y  
 $\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega = (\omega \cdot \omega) \cdot \omega = \omega \cdot \omega \cdot \omega$

**9.**  $\omega^\omega = \bigcup \{\omega^n / n \in \omega\}$ .

**10.**  $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ .

**11.**  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$ .