Números de Hartog y Ordinales Iniciales

Como nos muestran las propiedades de B_a, éste es un ordinal que juega un papel muy importante dentro del orden natural de los ordinales. Este ordinal lleva el nombre de *Número de Hartog del conjunto* a. Formalmente:

Definición$_1$.

$$H : V \to OR$$
$$\forall x\,, \quad H(x) = \left\{\alpha \;/\; \alpha \precsim x\right\}$$

$H(a)$ es el *(Número de) Hartog de (del conjunto)* a.

Proposición$_1$. Para cualquier conjunto a, se tiene:

$$H(a) = \left\{\beta \;/\; \exists u,v\left[u \subseteq a \;\&\; v \subseteq u \times u \;\&\; \left\langle u,\, v\right\rangle \in COBO \;\&\; \tau\left(u,\, v\right) = \beta\right]\right\}$$

Así, $H(a)$ no es más que el conjunto de las "distintas formas de bien ordenar" a los subconjuntos de a. Traigamos aquí las propiedades de B_a en esta nueva terminología.

Como vimos, $H(0) = 1$ y $H(\omega) = \omega \cup \left\{\beta \;/\; \beta \sim \omega\right\}$.

Proposición$_2$. Sean a y b conjuntos arbitrarios.

1. **a**). $\forall\alpha\left[\alpha < H(a) \;\to\; \alpha \precsim a\right]$.

   b). $H(a) \not\precsim a$

   c). $\forall\beta\left[H(a) \leq \beta \;\to\; \beta \not\precsim a\right]$

2. $H(a) = \bigcap\left\{\beta \;/\; \beta \not\precsim a\right\}$.
   Así, $H(a)$ es el primer ordinal que no es biyectable con algún subconjunto de a.

3. $\forall\alpha\left[\alpha < H(a) \;\to\; \alpha \nsim H(a)\right]$. De hecho, $\forall\alpha\left[\alpha < H(a) \;\to\; \alpha \prec H(a)\right]$.

4. Si $a \sim b$, entonces $H(a) = H(b)$.

5. Si $\langle a,r\rangle \in COBO$, entonces $\tau(a,r) \in H(a)$, $\tau(a,r) <_{OR} H(a)$ y $\tau(a,r) \prec H(a)$.

Proposición$_3$. Sean α y β ordinales arbitrarios. Así,

1. $\alpha \in H(\alpha)$, $\alpha <_{OR} H(\alpha)$ y $\alpha \prec H(\alpha)$.

2. $\beta < H(\alpha) \to \beta \nsim H(\alpha)$
y por tanto, $\beta < H(\alpha) \to \beta \prec H(\alpha)$.

3. Si $\alpha \leq \beta < H(\alpha)$, entonces $\alpha \sim \beta \prec H(\alpha)$.

4. $\forall \gamma \left[H(\alpha) \leq \gamma \ \to \ \alpha \prec \gamma \right]$.

5. $H(\alpha) = \bigcap \left\{ \gamma \ / \ \alpha \prec \gamma \right\}$.
Así, $H(\alpha)$ es el primer ordinal que es más grande -en tamaño- que α.

6. $\forall n \in \omega$, $H(n) = n + 1$ y $\omega \prec H(\omega)$.

7. $\forall \alpha \geq \omega$, $H(\alpha) \in LIM$.

8. $\alpha \prec H(\alpha) \prec H(H(\alpha))$.

Observemos que:

a). $0 \leq \beta < \omega$, entonces $\beta \prec \omega$,

b). $\omega \leq \beta < H(\omega)$, entonces $\omega \sim \beta \prec H(\omega)$ y

c). $H(\omega) \leq \gamma < H(H(\omega))$, entonces $H(\omega) \sim \gamma \prec H(H(\omega))$.

Esto nos dá un nuevo tipo de ordinales,

Definición$_2$. Un ordinal α es un *(Ordinal) Inicial* syss no es biyectable con algún ordinal anterior. En símbolos:

$$\forall \beta \left[\beta < \alpha \ \to \ \beta \nsim \alpha \right]$$

Como ejemplos de ordinales iniciales, tenemos a cada natural y a ω y también a los números de Hartog de cualquier conjunto. Veamos algunas propiedades.

Proposición$_3$. Todos los ordinales iniciales infinitos, son límites:

$$\forall \alpha \geq \omega \left[\alpha \text{ es inicial } \to \ \alpha \in LIM \right]$$

Proposición$_4$. Los conjuntos bien ordenables son equipotentes a un único ordinal inicial.
Prueba: Supongamos que $a \in BO$. Así, el conjunto (?) de todos los ordinales equipotentes a a, es no–vacío. Sea

$$\alpha = \bigcap \left\{ \beta \ / \ \beta \sim a \right\}$$

el ordinal α es inicial. †

Observación:

1. **ZF**$^-$ $\vdash (V = BO) \to \forall x\, \exists! \alpha \left[\alpha \sim x \;\; \& \;\; \alpha \text{ es inicial} \right]$. De hecho,
2. **ZF**$^-$ $\vdash (V = BO) \leftrightarrow \forall x\, \exists! \alpha \left[\alpha \sim x \;\; \& \;\; \alpha \text{ es inicial} \right]$.

Proposición$_5$. La unión de un conjunto de ordinales iniciales es un ordinal inicial. En símbolos:

$$\forall \alpha \in a \left(\alpha \text{ es inicial} \right) \to \bigcup a \text{ es inicial}$$

Prueba: Supongamos que a es un conjunto de ordinales iniciales. Sean $\beta = \bigcup a$ y $\gamma < \beta$. Así, hay un $\alpha \in a$ tal que $\gamma \in \alpha$. Por lo que tenemos que $\gamma \precsim \alpha \precsim \beta$. Si fuera el caso que $\gamma \sim \beta$, por el teorema del sandwich, obtendríamos que $\gamma \sim \alpha$, con $\gamma < \alpha$, contradiciendo que α es un ordinal inicial. Por tanto $\gamma \nsim \beta$ y de aqui que β sea inicial.†

Notación: CAR denotará a la clase de todos los ordinales iniciales transfinitos.

$$CAR = \left\{ \alpha \;/\; \alpha \geq \omega \;\&\; \alpha \text{ es inicial} \right\}$$

Corolario$_6$. $CAR \notin V$.

Pasemos a dar una lista de ordinales iniciales transfinitos y esto lo haremos usando recursón general para ordinales en su segunda forma:

Definición$_3$.

$$\omega\_ : OR \to V$$

I. $\omega_0 = \omega$

II. $\forall \alpha,\ \omega_{\alpha^+} = H(\omega_\alpha)$

III. $\forall \alpha \in LIM,\ \omega_\alpha = \bigcup \left\{ \omega_\xi \;/\; \xi < \alpha \right\}$

Observaciones:

1. $\omega\_ : OR \to CAR$.
2. $\forall \alpha\, \forall \beta \left[\omega_\alpha \leq \beta < \omega_{\alpha^+} \;\to\; \omega_\alpha \sim \beta \prec \omega_{\alpha^+} \right]$.
3. $\forall \alpha \left[\omega_{\alpha^+} = \bigcap \left\{ \beta \;/\; \omega_\alpha \prec \beta \right\} \right]$
4. $\forall \alpha \left[\omega_{\alpha^+} = \bigcap \left\{ \beta \;/\; \beta \text{ inicial } \& \; \beta > \omega_\alpha \right\} \right]$:

Si α es un ordinal, entonces

a. $\omega_\alpha < \omega_{\alpha^+}$

b. $\forall\beta\left[\beta \text{ inicial } \& \ \beta > \omega_\alpha \ \rightarrow \ \omega_{\alpha^+} \leq \beta\right]$

5. Tenemos que ω y ω_ω (de hecho, cualquier ω_α con α un límite) *no son Hartog* de algún ordinal (¿Por qué?). Sin embargo es consistente, con **ZF**$^-$, suponer que son el Hartog de algún conjunto –por supuesto no–bien ordenable.

Proposición$_7$. La funcional $\omega\_$ es monótona y por tanto inyectiva.

$$\forall\alpha\,\forall\beta\left[\alpha < \beta \ \rightarrow \ \omega_\alpha < \omega_\beta\right]$$

Prueba: Sea $\alpha \in OR$ arbitrario. Probaremos por inducción sobre los ordinales –2a. forma– que: $\forall\beta\left[\ \alpha < \beta \rightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta\ \right]$. Sea pues $\varphi(\beta) \rightleftharpoons \left[\ \alpha < \beta \rightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta\ \right]$.

I). $\varphi(0)$: Es trivial el hecho: $\alpha < 0 \rightarrow \omega_\alpha < \omega_0$.

II). $\forall\beta\left[\ \varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\beta^+)\ \right]$: Sea pues $\beta \in OR$ y supongamos inductivamente que $\varphi(\beta)$. Ahora bien, si $\alpha < \beta^+$, tenemos que $\alpha \leq \beta < \beta^+$, por lo que, por H.I. y por ser $\omega\_$ una funcional, $\omega_\alpha \leq \omega_\beta$. Pero $\omega_\beta < H(\omega_\beta) = \omega_{\beta^+}$, concluimos que $\omega_\alpha < \omega_{\beta^+}$.

III). $\forall\beta \in LIM\left[\forall\xi < \beta\ \varphi(\xi) \ \rightarrow \ \varphi(\beta)\right]$: Sea pues $\beta \in LIM$ y supongamos que $\alpha < \beta$. Como $\omega_\beta = \bigcup\left\{\omega_\xi \ / \ \xi < \beta\right\}$ y $\alpha < \alpha^+ < \beta$, tenemos que $\omega_\alpha < H(\omega_\alpha) = \omega_{\alpha^+} \leq \omega_\beta$. †

Proposición$_8$. La funcional $\omega\_$ es sobre los ordinales iniciales infinitos:

$$CAR \subseteq IMG(\omega\_)$$

Prueba: Sea $\Psi(\beta) \rightleftharpoons \left[\ \beta \in CAR \rightarrow \exists\alpha\ (\omega_\alpha = \beta)\ \right]$. Probemos que $\forall\beta\ \Psi(\beta)$ y esto lo haremos por inducción sobre OR, en su 1a. forma.

Sea pues, $\beta \in CAR$. Consideremos a

$$b = \left\{\xi \ / \ \xi < \beta \ \& \ \xi \in CAR\right\}$$

por hipótesis inductiva tenemos que,

$$b = \left\{\omega_\alpha \ / \ \omega_\alpha < \beta\right\}$$

Ahora nos fijamos en la pre–imágen de b, bajo $\omega\_$, es decir en

$$\left\{\alpha \ / \ \omega_\alpha < \beta\right\}$$

pero éste es un conjunto transitivo de ordinales, por lo que es un ordinal, digamos γ. Analizemos a γ :

1o.) Si $\gamma = 0$. Aquí, $b = \emptyset$ y por tanto $\beta = \omega = \omega_0 = \omega_\gamma$.

2o.) Si $\gamma = \delta^{+}$ para algún δ. Tenemos que $\delta = max_{<_{OR}} \gamma$ y puesto que $\omega\_$ es monótona, tenemos que $\omega_{\delta} = max_{<_{OR}} b$. Así, $\omega_{\delta} < \beta$, y como β también es inicial, se tiene que $\omega_{\delta} < \omega_{\delta^{+}} \leq \beta$. Ahora bien, por la maximalidad de δ, es imposible que $\omega_{\delta^{+}} < \beta$. Concluimos que $\omega_{\gamma} = \omega_{\delta^{+}} = \beta$.

3o.) Si $\gamma \in LIM$.

$$
\begin{aligned}
\omega_{\gamma} &= \bigcup\left\{\omega_{\alpha} \ / \ \alpha < \gamma\right\} && \text{Por definición de } \omega\_ \\
&= \bigcup\left\{\omega_{\alpha} \ / \ \omega_{\alpha} < \beta\right\} && \text{Por definición de } \gamma \\
&= \bigcup b && \text{Por definición de } b \\
&\leq \beta && \beta \text{ es cota superior de } b
\end{aligned}
$$

Nuevamente, tenemos que $\omega_{\gamma} \nless \beta$. Así, $\beta = \omega_{\gamma}$.

En cualquier caso resulta que $\omega_{\gamma} = \beta$ y por tanto β está en la imágen de $\omega\_$. †

Corolario. La funcional $\omega\_$, establece un isomorfismo entre la clase de los ordinales y la clase de los ordinales iniciales transfinitos:

$$\langle OR, \in \rangle \underset{\omega\_}{\simeq} \langle CAR, \in \rangle$$