CARDINALIDAD Y CARDINALES

Debido al Teorema de Enumeración, podemos establecer la siguiente,

Definición$_1$.

$$\mid\ \mid : BO \to OR$$
$$\forall x \in BO, \quad \mid x \mid = \bigcap \left\{ \alpha \ / \ \alpha \sim x \right\}$$

Léase $\mid a \mid$ como: "*el cardinal del conjunto a*".

Obsérvese, aunque no es necesario para la definición, que $A = \left\{ \alpha \ / \ \alpha \sim x \right\} \in V$, pues $A \subseteq H(x) \in V$.

Proposición$_1$.

1. $\forall x \in BO, \mid x \mid \sim x$.

2. $\forall x,y \in BO \left[x \sim y \leftrightarrow \mid x \mid = \mid y \mid \right]$.

3. $\forall x \in BO, \mid x \mid$ es un ordinal inicial.

4. **a**). $\forall x,y \in BO \left[x \precsim y \leftrightarrow \mid x \mid \leq \mid y \mid \right]$

b). $\forall x,y \in BO \left[x \prec y \leftrightarrow \mid x \mid < \mid y \mid \right]$

5. **a**). $\forall x,y \in BO \left[\mid x \mid \leq \mid y \mid \ \vee \ \mid y \mid \leq \mid x \mid \right]$

b). $\forall x,y \in BO \left[\mid x \mid < \mid y \mid \ \vee \ \mid x \mid = \mid y \mid \ \vee \ \mid y \mid < \mid x \mid \right]$

Ejemplos:

1. **a**). $\forall n \in \omega, \mid n \mid = n$.

b). $a \in FIN$ syss $\mid a \mid \in \omega$.

2. **a**). $\mid \omega \mid = \omega$.

b). Para $a \in BO$, se tiene que $a \in INF$ syss $\mid a \mid \geq \omega$.

3. $\forall x \in BO, \mid x \mid = x \leftrightarrow x$ es un ordinal inicial.

4. $\forall x \in BO, \Big| \mid x \mid \Big| = \mid x \mid$.

Notación:

1. $card = \left\{\alpha \;/\; \alpha \text{ es un ordinal inicial}\right\}$. Si $\alpha \in card$, diremos que α es un *(Número) Cardinal (Ordinal).* Así, car es la clase (propia) de todos los cardinales.

2. Utilizaremos como metavariables para cardinales, las letras griegas minúsculas: $\kappa,\ \lambda,\ \mu,\ \eta,\ \ldots$

3. Recordando que:

$$CAR = \left\{\alpha \;/\; \alpha \geq \omega \;\&\; \alpha \text{ es un ordinal inicial}\right\}$$

Tenemos con esta notación que, $card = \omega \cup CAR$. Así, ω es el *conjunto* de los *Cardinales finitos y* CAR la *clase (propia)* de los *Cardinales Transfininitos. Con esta notación* tenemos que,

$$\left|\;\right| : BO \twoheadrightarrow card$$

4. **Convención**: Para conjuntos que no son bien ordenables, *por lo pronto,* no definiremos su cardinalidad, pero si podemos comparar su tamaño, por lo que:
Si $a, b \notin BO$, diremos:

$$\begin{aligned} \left| a \right| = \left| b \right| &\;\; \rightleftharpoons \;\; a \sim b \\ \left| a \right| \leq \left| b \right| &\;\; \rightleftharpoons \;\; a \precsim b \\ \left| a \right| < \left| b \right| &\;\; \rightleftharpoons \;\; a \prec b \end{aligned}$$

es decir, aquí hablamos de una relación –de hecho, una relacional– entre conjuntos.

Proposición$_2$.

1. **a**). $\forall\alpha,\ \left|\alpha\right| \leq \alpha.$

b). $\forall\kappa,\ \left|\kappa\right| = k.$

2. **a**). $\forall\alpha\ \forall\kappa,\ \alpha < \kappa \rightarrow \alpha \nsim \kappa.$

b). $\forall\alpha\ \forall\kappa,\ \alpha < \kappa \rightarrow \alpha \prec \kappa.$

c). $\forall\kappa\ \forall\beta,\ \kappa < \beta \rightarrow \kappa \precsim \beta.$

3. $\forall\kappa\ \forall\lambda,\ \kappa < \lambda \leftrightarrow \kappa \prec \lambda$

4. **a**). $\forall\alpha,\ H(\alpha) \in card.$

b). $\forall\alpha,\ \left|\alpha\right| \leq \alpha < H(\alpha).$

c). $\forall\alpha,\ \left|\alpha\right| \sim \alpha \prec H(\alpha).$

5. **a**). $\forall\kappa\,\exists\lambda,\ \kappa < \lambda.$

b). $\forall\kappa,\ H(\kappa) = \bigcap\left\{\lambda \in card\ /\ \lambda > \kappa\right\}$

6. Si a es un conjunto de cardinales, entonces:

i). $\bigcup a \in card.$

ii). Si a no tiene máximo, $\bigcup a$ es el primer cardinal *mayor* que todos los cardinales de a.

Definición$_2$.

1. Si κ es un cardinal el *Cardinal Sucesor de* κ es $H(\kappa)$, denotado por κ^+.

2. Un cardinal λ es un *Cardinal Sucesor syss hay un* κ tal, que $\kappa^+ = \lambda$.

3. Un cardinal es un *Cardinal Límite* syss no es el cero ni es sucesor de algún otro.

Notación: Para toda α, algunas veces escribiremos $\aleph_\alpha$ en lugar de ω_α. Dejaremos la notación de ω_α para cuando lo que nos interese sean sus propiedades como ordinal, en cambio si lo que importa son sus propiedades de cardinalidad, utilizaremos $\aleph_\alpha$. Por ejemplo ω_0^+ denota al ordinal sucesor de ω_0 es decir a $\omega \cup \{\omega\}$, en cambio $\aleph_0^+$ es el cardinal sucesor de $\aleph_0$, a saber $\aleph_1$.

Con esta notación, podemos definir una funcional, llamada *la funcional* $\aleph$, la cual ordena en forma ascendente a todos los cardinales tranfinitos:

$$\aleph : OR \rightarrowtail\!\!\!> CAR$$

I. $\aleph_0 = \omega$

II. $\forall\alpha, \aleph_{\alpha^+} = \aleph_\alpha^+$

III. $\forall\alpha \in LIM, \aleph_\alpha = \bigcup\left\{\aleph_\xi\ /\ \xi < \alpha\right\}$

Tenemos que

$$CAR = \left\{\aleph_\alpha\ /\ \alpha \in OR\right\}$$

Ejemplos:

1. El 0 no es cardinal sucesor ni tampoco un cardinal límite.

2. $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$, n es un cardinal sucesor.

3. ω o bién, con la nueva notación, $\aleph_0$, es un cardinal límite, de hecho es el primer cardinal límite.

4. $\aleph_1 = \aleph_{0^+} = \aleph_0^+ = H(\aleph_0)$ es un cardinal sucesor, es el primer cardinal incontable, es decir, es el primer cardinal estrictamente más grande que $\aleph_0$.

5. $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha^+}$ es un cardinal sucesor para todo α.

6. $\aleph_\alpha$ es límite syss $\alpha \in LIM \cup \{0\}$.