

Aritmética Finita de Cardinales

Definición₁.

$$+ : \text{card} \times \text{card} \rightarrow \text{card}$$

$$\kappa + \lambda = \left| \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \right|$$

Definición₂.

$$\cdot : \text{card} \times \text{card} \rightarrow \text{card}$$

$$\kappa \cdot \lambda = \left| \kappa \times \lambda \right|$$

Ejemplos:

1. $\kappa + 0 = \kappa$, $\kappa \cdot 0 = 0$ y $\kappa \cdot 1 = \kappa$
2. Tanto la suma como el producto cardinal restringidas a los naturales, coinciden con las ya conocidas.
3. $\forall n \in \omega$, $\aleph_0 + n = \aleph_0$ y $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$, $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.
4. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$.

Proposición₀. Si $a, b \in BO$, entonces:

- a).
 - i). $|a \cup b| \leq |a| + |b|$
 - ii). $a \cap b = \emptyset \rightarrow |a \cup b| = |a| + |b|$
- b). $|a \times b| = |a| \cdot |b|$
- c). Si $\kappa = |k|$ y $\lambda = |l|$, entonces $\kappa \cdot \lambda = |k \times l|$, $\kappa + \lambda \leq |k \cup l|$ y si $k \cap l = \emptyset$, se tiene que $\kappa + \lambda = |k \cup l|$

Prueba: Ejercicio.

†

Proposición₁. Conmutatividad:

- a). $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$
- b). $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

Prueba: Ejercicio.

†

Proposición₂. Asociatividad:

- a). $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$
- b). $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

Prueba: Ejercicio.

†

Proposición₃. Distributividad:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

Prueba: Sean $k, l, m \in V$ tales que $l \cap m = \emptyset$, $|k| = \kappa$, $|l| = \lambda$ y $|m| = \mu$. El resultado se sigue del hecho:

$$k \times (l \cup m) = (k \times l) \cup (k \times m)$$

†

Proposición₄. Las operaciones $+$ y \cdot son congruentes con el orden.

a). $\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$

b). $\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$

Prueba: Sean $k, l, m \in V$ tales que $k \cap m = \emptyset = l \cap m$, $|k| = \kappa$, $|l| = \lambda$ y $|m| = \mu$; y sea f testigo de que $k \lesssim_f l$. Definimos i y j como sigue:

$$i : k \cup m \rightarrow l \cup m \qquad \text{y} \qquad j : k \times m \rightarrow l \times m$$

$$\forall x \in k \cup m, \quad i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in k \\ \mathbf{0} & \\ x & \text{si } x \in m \end{cases} \qquad \forall \langle x, y \rangle \in k \times m, \quad j(x, y) = \langle f(x), y \rangle$$

Tenemos, $k \cup m \underset{i}{\lesssim} l \cup m$ y que $k \times m \underset{j}{\lesssim} l \times m$.

†

Proposición₅.

$$\kappa, \lambda \geq 2 \rightarrow \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$$

Prueba: Sean $k, l \in V$ tales que $k \cap l = \emptyset$ y $|k| = \kappa \geq 2$ y $|l| = \lambda \geq 2$. Basta ver que $k \cup l \lesssim k \times l$. Sean $a_0, a_1 \in k$ y $b_0, b_1 \in l$. Definimos,

$$h : k \cup l \rightarrow k \times l$$

$$\forall x \in k \cup l, \quad h(x) = \begin{cases} \langle x, b_0 \rangle & \text{si } x \in k \\ \mathbf{0} & \\ \langle a_0, x \rangle & \text{si } x \in l \setminus \{b_0\} \\ \mathbf{0} & \\ \langle a_1, b_1 \rangle & \text{si } x = b_0 \end{cases}$$

Así, $k \cup l \underset{h}{\lesssim} k \times l$.

†

Ejercicio: ¿ Qué ocurre si $\kappa < 2$ o $\lambda < 2$? Justifique.

Proposición₆.

1. $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$
2. $\kappa \geq 2 \rightarrow \kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$

Prueba: Ejercicio.

†

Pasemos ahora a calcular el producto cardinal, $\kappa \cdot \lambda$.

Definición₀. $\gamma \in OR$. El Orden Canónico sobre $\gamma \times \gamma$, denotado por \triangleleft_γ , queda definido como sigue:

1. $\triangleleft_\gamma \subseteq (\gamma \times \gamma) \times (\gamma \times \gamma)$, y
2. Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \gamma$,
 $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \triangleleft_\gamma \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \leftrightarrow \alpha_1 \cup \beta_1 < \alpha_2 \cup \beta_2$ o
 $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \beta_1 \cup \beta_2$ y $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle <_L \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$

donde $<_L$ es el orden lexicográfico en $\gamma \times \gamma$.

Lema₁.

- 1). $\langle \gamma \times \gamma, \triangleleft_\gamma \rangle \in COBO$.
- 2). Si $\alpha, \beta < \delta < \gamma$, entonces $\langle \alpha, \beta \rangle_{\triangleleft_\gamma} \subseteq \delta \times \delta$.

Prueba: TAREA.

†

Lema₂. Sean $\kappa \in card$ y $\langle a, r \rangle \in COBO$.

Si

- i). $\kappa \leq |a|$, y
- ii). $\forall x \in a, |x_r| < \kappa$,

entonces $\langle a, r \rangle \simeq \langle \kappa, \in_\kappa \rangle$

Prueba: Sea α el único ordinal tal que $\langle a, r \rangle \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$. Veamos que $\kappa = \alpha$.

$$\leq \Big] \kappa \leq |a| = | \alpha | \leq \alpha.$$

i) $\alpha \sim a$

\Leftarrow Supongamos lo contrario, con la intención de llegar a una contradicción.

Supongamos pues, que $\kappa < \alpha$, así $\kappa \in a$ y puesto que $\langle a, r \rangle \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$, hay un $x \in a$, tal que

$$\langle x_r, r \upharpoonright x_r \rangle \simeq \langle \kappa, \in_\kappa \rangle$$

pero entonces $|x_r| = \kappa \nabla$!!! la hipótesis ii).

†

Lema₃.

$$\forall \kappa \left[\kappa \geq \omega \rightarrow \kappa \times \kappa \sim \kappa \right]$$

Prueba: Sea κ un cardinal transfinito. Supongamos inductivamente que,

$$\forall \lambda < \kappa \left[\lambda \geq \omega \rightarrow \lambda \times \lambda \sim \lambda \right]$$

Si ponemos que $a = \kappa \times \kappa$ y $r = \aleph_\kappa$, resulta que $\langle a, r \rangle \in COBO$. Además $\langle a, r \rangle$ cumple con las hipótesis del **Lema₂** :

i). $\kappa \leq |a|$: Pues $\kappa \lesssim \kappa \times \kappa = a$. Y

ii). $\forall x \in a, |x_r| < \kappa$: Sea $x \in a$. Hay pues, $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $x = \langle \alpha, \beta \rangle$ y sea $\delta = (\alpha \cup \beta)^+$. Puesto que $\kappa \in LIM$, resulta que $\delta < \kappa$ y por el 2) del **Lema₁**, tenemos que $x_r \subseteq \delta \times \delta$. Respecto al tamaño de δ , tenemos dos casos:

Si $\delta < \omega$, entonces δ es finito y por tanto $\delta \times \delta$ también. Así,

$$|x_r| \leq |\delta \times \delta| < \omega \leq \kappa$$

Supongamos ahora que $\delta \geq \omega$ y sea $\mu = |\delta|$. Tenemos que,

$$\omega \leq \mu = |\delta| \leq \delta < \kappa \quad \text{y} \quad \delta \times \delta \sim \mu \times \mu$$

Por nuestra hipótesis inductiva, $\mu \times \mu \sim \mu$. Con esto tenemos:

$$|x_r| \leq |\delta \times \delta| = |\mu \times \mu| = |\mu| = \mu < \kappa$$

Concluimos, gracias al **Lema₂**, que $\langle \kappa \times \kappa, \aleph_\kappa \rangle \simeq \langle \kappa, \aleph_\kappa \rangle$ y de aquí que $\kappa \times \kappa \sim \kappa$. †

De la prueba extraemos un resultado muy significativo.

Corolario. Si $\kappa \in CAR$, entonces $\langle \kappa \times \kappa, \aleph_\kappa \rangle \simeq \langle \kappa, \aleph_\kappa \rangle$.

Con estos resultados a la mano, podemos regresar a la suma y producto entre cardinales.

Proposición₇.

1. Para $\kappa \in CAR$, se tiene que:

a). $\kappa + \kappa = \kappa$

b). $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

2. $\forall \alpha \left[\alpha \geq \omega \rightarrow \alpha \times \alpha \sim \alpha \right]$

Prueba:

1. Supongamos que $\kappa \geq \omega$. Así,

$$\kappa \leq \kappa + \kappa \underset{0 \leq \kappa}{\leq} \kappa \cdot \kappa \underset{\text{Prop}_5}{=} |\kappa \times \kappa| \underset{\text{Lem}_3}{=} |\kappa| = \kappa$$

2. Supongamos que $\alpha \geq \omega$. Así,

$$|\alpha \times \alpha| \stackrel{\text{Prop}_0}{=} |\alpha| \cdot |\alpha| \stackrel{|\alpha| \geq \omega}{=} |\alpha| \quad \dagger$$

Proposición₈. Sean $\kappa \leq \lambda$ y $\lambda \geq \omega$. Así:

1. $\kappa + \lambda = \lambda$, y

2. $\kappa \neq 0 \rightarrow \kappa \cdot \lambda = \lambda$.

Prueba:

1. $\lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = \lambda$.
 $0 \leq \kappa$ $\kappa \leq \lambda$ $\lambda \geq \omega$

2. $\lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$.
 $1 \leq \kappa$ $\kappa \leq \lambda$ $\lambda \geq \omega$

†

Ejemplos:

a). $n < \omega \rightarrow \aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.

b). $0 \neq n < \omega \rightarrow \aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$.

c). $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$.

d). $\aleph_{28} + \aleph_\omega = \aleph_{28} \cdot \aleph_\omega = \aleph_\omega$.

e). $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\alpha \cup \beta}$.