Pasemos ahora a definir la exponenciación entre cardinales, κ^λ.

En primer lugar, quisiéramos que esta definición, al restringirla a los cardinales finitos, coinsidiera con la de los números naturales. Una definición por recursión (general, por supuesto) solo llegaríamos a obtener la exponenciación ordinal y ésta no refleja lo que queremos.

Tomemos otro camino, pensemos que queremos calcular κ^λ, ésta es en cierta manera una forma de calcular $\kappa \cdot \kappa \cdot \ldots \cdot \kappa \cdot \ \ldots$ y este producto λ–veces. Esto tiene tantos elementos como tiene $\kappa \times \kappa \times \ \ldots \ \times \kappa \times \ \ldots$ (λ–veces). Es decir tomamos el producto cartesiano generalizado de κ consigo mismo λ–veces. Veamos este producto,

$$\underset{\alpha\in\lambda}{\times} \kappa = \left\{ f : \lambda \to \bigcup_{\alpha\in\lambda} \kappa \ / \ \forall\alpha \in \lambda \left[f(\alpha) \in \kappa \right] \right\} = \left\{ f \ / \ f : \lambda \to \kappa \right\} = {}^{\lambda}\kappa$$

Así, si queremos una buena definición de exponenciación cardinal deberíamos tener que

$$\kappa^\lambda \sim {}^{\lambda}\kappa$$

Pero para ello tendríamos que tener, debido a la arbitrariedad de κ y de λ, que ${}^{\lambda}\kappa \in BO$, pero esto ¡no lo sabemos! (?).

De ahora en adelante, trabajaremos con el Axioma de Elección (**AE** $\leftrightarrow V = BO$), es decir en **ZFC**$^-$.

Definición$_3$. Para $\kappa,\ \lambda \in card$, se define,

$$\kappa^\lambda = \left| \ {}^{\lambda}\kappa \ \right|$$

Ejemplos:

a). $\kappa^0 = 1.$
En particular, $0^0 = 1.$

b). $\lambda \neq 0 \to 0^\lambda = 0.$

c). $\kappa^1 = \kappa.$

d). $1^\kappa = 1.$

e). $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa.$
Pues, ${}^{2}\kappa \sim \kappa \times \kappa$: a cada $i \in {}^{2}\kappa$, se le puede asociar el par $\langle i(0), i(1) \rangle \in \kappa \times \kappa.$

f). Si $\kappa \geq \omega$, entonces $\kappa^n = \kappa$, para todo $n \in \omega \setminus \{0\}.$

g). La exponenciación cardinal restringida a los finitos, coincide con la correspondiente entre naturales.

h). **i**). $2^{\aleph_0} = \left| {}^{\omega}2 \right| = \left| \wp(\omega) \right| = \left| \mathbb{R} \right|$

ii). $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$

iii). **H**ipótesis del **C**ontinuo (**HC**): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Proposición$_9$. $\left| {}^{b}a \right| = \left| a \right|^{\left| b \right|}$

Prueba: Sean κ, λ, f y g tales que $a \underset{f}{\sim} \kappa$ y $b \underset{g}{\sim} \lambda$. Entonces

$$ {}^{b}a \underset{h}{\sim} {}^{\lambda}\kappa $$

donde, para toda $i : b \to a$, $h(i) = \left\{ \left\langle \alpha, f(i(g^{-1}(\alpha))) \right\rangle \ / \ \alpha \in \lambda \right\}$. Es decir, $h(i) = f \circ (i \circ g^{-1})$. †

Proposición$_{10}$.

$$ \kappa \leq \lambda \to \kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu} $$

Prueba: Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa \subseteq \lambda$ y, obviamente, ${}^{\mu}\kappa \subseteq {}^{\mu}\lambda$ y de aquí que ${}^{\mu}\kappa \precsim {}^{\mu}\lambda$. †

Proposición$_{11}$.

$$ \lambda \leq \mu \to \kappa^{\lambda} \leq \kappa^{\mu} $$

Excepto el caso en que, $\kappa = 0$, $\lambda = 0$ y $\mu \neq 0$.
Prueba: Supongamos que $\kappa \neq 0 \neq \lambda$ y que $\lambda \leq \mu$. Tenemos que ${}^{\lambda}\kappa \precsim {}^{\mu}\kappa$, pues podemos asociar a cada $i \in {}^{\lambda}\kappa$, le asociamos $i' = i \cup \left\{ \langle \alpha, 0 \rangle \ / \ \alpha \in \mu \setminus \lambda \right\} \in {}^{\mu}\kappa$. †

Proposición$_{12}$.

1. $\lambda > 0 \to \kappa \leq \kappa^{\lambda}$
2. $\kappa > 1 \to \lambda \leq \kappa^{\lambda}$
3. $\kappa_1 < \kappa_2 \ \& \ \lambda_1 < \lambda_2 \to \kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$

Prueba: **Ejercicio**. †

Proposición$_{13}$.

$$ (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu} $$

Prueba: Tenemos que:

$$ {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa) \underset{h}{\sim} {}^{\mu \times \lambda}\kappa $$

donde, para cada $i : \mu \to {}^{\lambda}\kappa$, se tiene:

$$h(i) = j \leftrightarrow \begin{cases} j : \mu \times \lambda \to \kappa \\ \& \\ \forall \langle \alpha, \beta \rangle \in \mu \times \lambda \left[j(\alpha, \beta) = i(\alpha)(\beta) \right] \end{cases}$$

†

Proposición$_{14}$.

$$\kappa^{\lambda} \bullet \kappa^{\mu} = \kappa^{\lambda+\mu}$$

Prueba: Sean l y m tales que $l \cap m = \emptyset$, $\left| l \right| = \lambda$ y $\left| m \right| = \mu$. Así,

$$^{l \cup m}\kappa \underset{h}{\sim} {}^{l}\kappa \times {}^{m}\kappa$$

donde, para toda $i : l \cup m \to \kappa$, se tiene que:

$$h(i) = \left\langle i \restriction l \ , \ i \restriction m \right\rangle$$

†

Proposición$_{15}$.

$$\kappa < \kappa^{+} \leq 2^{k}$$

Prueba: Sabemos que $\kappa \prec \wp(\kappa) \sim {}^{\kappa}2$, por lo que $\kappa < 2^{k}$. El resto se sigue de que $\kappa^{+} = \bigcup \left\{ \lambda \ / \ \lambda > \kappa \right\}$. †

Proposición$_{16}$.

$$2 \leq \kappa \leq \lambda \ \& \ \lambda \geq \omega \to 2^{\lambda} = \kappa^{\lambda} = \lambda^{\lambda} = (\lambda^{+})^{\lambda}$$

Prueba: Puesto que

$$2 \leq \kappa \leq \lambda < \lambda^{+} \leq 2^{\lambda}$$

por la **Proposición$_{11}$**,

$$2^{\lambda} \leq \kappa^{\lambda} \leq \lambda^{\lambda} \leq (\lambda^{+})^{\lambda} \leq (2^{\lambda})^{\lambda} = 2^{\lambda \cdot \lambda} \underset{\lambda \geq \omega}{=} 2^{\lambda}$$

†