COFINALIDAD

El estudio de la exponenciación ordinal nos lleva a analizar la forma de cómo se comportan los ordinales en su parte terminal, dicho de manera coloquial, de "cómo terminan los ordinales". Empezaremos comparando un par de conjuntos –de ordinales– arbitrarios, para continuar con un conjunto y un ordinal y despues veremos la comparación a través de funciones, terminaremos con el concepto de **cofinalidad de un ordinal**.

Antes recordemos algunos conceptos y propiedades básicas:

Si $a \in V$ entonces $\bigcup a$ es el $\subseteq$–menor conjunto que contiene a todos los elementos de a, en símbolos:

$$\text{i)} \quad \forall x \in a \, (x \subseteq \bigcup a)$$

$$\text{ii)} \quad \forall w \left[\forall x \in a \, (x \subseteq w) \to \bigcup a \subseteq w \right]$$

Lo cual nos dice que la $\bigcup a$ es el supremo, con respecto a la relacional $\subseteq$, de a, en símbolos $\bigcup a = Sup_{\subseteq} \, a$.

Puesto que el (buen) orden, $<$, de los ordinales es $\in$, o equivalentemente $\subsetneq$, tenemos que, si $a \subseteq OR$ entonces:

$$\text{i)} \quad \forall \alpha \in a \left(\alpha \leq \bigcup a \right)$$

$$\text{ii)} \quad \forall \gamma \left[\forall \alpha \in a \, (\alpha \leq \gamma) \to \bigcup a \leq \gamma \right].$$

Una forma equivalente (contrapositiva) a ii) que usaremos muy frecuentemente es:

$$\text{ii')} \quad \forall \gamma \left[\gamma < \cup a \to \exists \alpha \in a \, (\gamma < \alpha) \right] \qquad (*)$$

–que, en éste caso, no es otra cosa que una parte de la definición de $\bigcup a$.

De ahora en adelante, sean $a, b \subseteq OR$.

Primeramente veamos la noción que me permite decir que un conjunto de ordinales termina *uno junto con* el otro.

Definición$_1$. a y b son *Confinales* syss

i) $\forall \alpha \in a \, \exists \beta \in b \, [\alpha \leq \beta]$

ii) $\forall \beta \in b \, \exists \alpha \in a \, [\beta \leq \alpha]$

Ejemplos:

1. $\{2n \ / \ n \in \omega\}$ y $\{2n+1 \ / \ n \in \omega\}$ son confinales.

2. $\{\aleph_n \ / \ n \in \omega\}$ y $\aleph_\omega$ son confinales.

Proposición$_1$.

1. Si a y b son confinales entonces $\bigcup a = \bigcup b$.

2. La conversa de la anterior no es cierta.

3. Supongamos que tanto a y b tienen máximo o bien, ninguno tiene máximo. Así,

si $\bigcup a = \bigcup b$ entonces a y b son confinales.

Prueba:

1. La condición **i**) nos dice que $\bigcup b$ es cota superior de a y por tanto $\bigcup a \leq \bigcup b$. Análogamente, $\bigcup b \leq \bigcup a$.

2. Como ejemplo considere, $a = \{\omega\}$ y $b = \omega$. Tenemos que $\bigcup a = \omega = \bigcup b$ y sin embargo a y b no son confinales. Otro contraejemplo es $a = \{2n \ / \ n \in \omega\}$ y $b = \omega^+$.

3. Si ambos tienen un máximo, digamos γ, entonces $\bigcup a = \gamma = \bigcup b$ y resultan ser a y b confinales. Si ninguno tiene máximo: Sea $\alpha \in a$, puesto que a no tiene máximo, tenemos que $\alpha < \bigcup a$, pero por hipótesis $\bigcup a = \bigcup b$, así hay un $\gamma \in b$ tal que $\alpha < \beta$. Análogamente para la otra parte. †

Nos interesa ver ahora el caso en que uno de los conjuntos de ordinales sea un ordinal, digamos $a \in OR$.

Proposición$_2$.

1. b y α son confinales syss

i). $b \subseteq \alpha$

ii). $\forall \gamma \in \alpha \ \exists \beta \in b \ [\gamma \leq \beta]$

2. b y α^+ son confinales syss

i). $b \subseteq \alpha^+$

ii). $\alpha \in b$

3. Sea $\alpha \in LIM$. Así, b y α son confinales syss

i). $b \subseteq \alpha$

ii). $\forall \gamma \in \alpha \ \exists \beta \in b \ [\gamma < \beta]$

Prueba: **1** y **2** son inmediatas de la definición. Para **3**, el regreso es inmediato al cumplir **1**. (sin importar que α sea límite). Ahora, sea $\gamma \in \alpha$, por ser $\alpha \in LIM$, tenemos que $\gamma < \gamma^+ \in \alpha$, por ser confinales α y b, hay un $\beta \in b$ tal que $\gamma^+ \leq \beta$ y por tanto $\gamma < \beta$. †

La última ecuación (**3**.**ii**) nos recuerda la noción de un conjunto acotado superiormente, en un orden parcial. En nuestro caso estamos hablando de buenos ordenes (ordinales) en los cuales trivialmente se tiene que todo subconconjunto está acotado inferiormente, así, lo que nos intersaría es saber si un subconjunto está o no acotado superiormente. Por lo que de ahora en adelante:

Si $\langle a, < \rangle \in COBO$ y $b \subseteq a$, diremos que b es *Acotado* en a syss

$$\exists x \in a \; \forall y \in b \; [y \leq x]$$

o, equivalentemente, b es *NO–acotado* en a syss

$$\forall x \in a \; \exists y \in b \; [x < y]$$

OjO:

- Compare esta ecuación con (*).
- Si a tiene máximo, todos sus subconjuntos son acotados.

Con esto y lo anterior podemos resumir.

Proposición$_3$. Sea $\alpha \in LIM.$ Son equivalentes:

a. b y α son confinales.

b. i) $b \subseteq \alpha$

ii) $\forall \gamma \in \alpha \; \exists \beta \in b \; [\gamma < \beta]$

c. i) $b \subseteq \alpha$

ii) b es no–acotado en α.

d. i) $b \subseteq \alpha$

ii) $\bigcup b = \alpha \left(= \bigcup \alpha \right)$

Ahora la idea es ver cuándo un conjunto termina *como* el otro. Esto se hará usando una función y viendo si su imágen es confinal. Una idea que surge natural es, que dicha función fuera monótona estricta creciente o dicho de otra manera, que se tuviera una copia fiel (un isomorfismo) del primero en su imágen; sin embargo, por razones técnicas nos conviene dejar funciones arbitrarias, que ocasionan cierta anomalías o si se quiere ciertos absurdos (ver el ejemplo 4, más adelante), todos ellos serán superados. Estando así las cosas, nos podemos remitir a considerar dos ordinales en vez de dos conjuntos arbitrarios de ordinales.

Definición$_2$. β es *Cofinal en* α syss

$$\exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[\, f[\beta] \text{ y } \alpha \text{ son confinales } \right]$$

a dicha función se le llama (*un*) *testigo de la cofinalidad de* β *en* α.

Observemos que si f es un testigo de que β es *cofinal en* α, entonces

$$\forall \gamma \in \alpha\, \exists \delta \in \beta \left(\gamma \leq f(\delta) \right)$$

Ejemplos:

1. α es cofinal en α, cqsea α.

2. Si 0 es cofinal en α entonces $\alpha = 0$ y si β es cofinal en 0 entonces $\beta = 0$.

3. 1 es cofinal en α^{+}.

4. Casos patológicos:

- Si $\beta > \alpha$ entonces β es cofinal en α.
- β es cofinal en α^{+}, para todo $\beta \neq 0$.
  Un caso particular es, ω es cofinal en ω^{+}.
- ω^{+} es cofinal en $\omega + \omega$. Un testigo es $n \mapsto \omega + n$, para $n \in \omega$ y $\omega \mapsto 0$.

5. ω es cofinal en $\omega + \omega$, en $\omega \cdot \omega$, en ω^{ω}, en ε_0.

6. ω es cofinal en $\aleph_{\omega}$. Un testigo es: $n \mapsto \aleph_n$, para $n \in \omega$.

7. Tanto ω como $\omega + \omega$ son cofinales en $\aleph_{\omega+\omega}$.

8. Si $\beta \in LIM$ entonces β es cofinal en $\aleph_{\beta}$: Si $\xi < \beta$, $\xi \mapsto \aleph_{\xi}$

9. $\mid \alpha \mid$ es cofinal en α : Cualquier biyección entre α y $\mid \alpha \mid$, es testigo de la cofinalidad.

10. (**AEN**). ω NO es cofinal en ω_1: Pues, si f fuera testigo de la cofinalidad,

$$\omega_1 = \bigcup \omega_1 = \bigcup f[\omega] = \bigcup \left\{ f(n) \ / \ n \in \omega \right\}$$

y por tanto, ω_1 sería la unión numerable de conjuntos contables.

Con los ejemplos vistos tenemos que dado un ordinal, hay muchos ordinales que terminan como él, podríamos pensar entonces en tomar un representante de “todas estas maneras de terminar” y quien mejor que el más pequeño de todos ellos, tenemos la siguiente,

Definición$_3$. La *Cofinalidad de* α, $cof(\alpha)$, es el primer ordinal que es cofinal con α. Formalmente:

$$cof : OR \rightarrow OR$$

$$cof(\alpha) = \bigcap \left\{\beta \ / \ \beta \text{ es cofinal en } \alpha\right\}$$

Obsérvese que:

- $$\begin{aligned} cof(\alpha) &= \bigcap \left\{\beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha\big(f[\beta] \text{ y } \alpha \text{ son confinales}\big)\right\} \\ &= \bigcap \left\{\beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha\big[\forall \gamma \in \alpha \, \exists \delta \in \beta \, (\gamma \le f(\delta))\big]\right\} \end{aligned}$$
- $cof(\alpha)$ es cofinal en α.
- Si β es confinal en α, entonces $cof(\alpha) \le \beta$.

Proposición$_4$.

1. $cof(\alpha) \le \left| \alpha \right| \le \alpha$
2. $cof(\alpha) = 0$ syss $\alpha = 0$
3. $cof(\alpha) = 1$ syss $\exists \gamma \ (\alpha = \gamma^+)$
4. $\alpha \in LIM$ syss $cof(\alpha) \in LIM$
5. Sea $\alpha \in LIM$. Así,

$$\begin{aligned} cof(\alpha) &= \bigcap \left\{\beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[\forall \gamma \in \alpha \, \exists \delta \in b \, (\gamma < f(\delta))\right]\right\} \\ &= \bigcap \left\{\beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left(f[\beta] \text{ es no–acotada en } \alpha\right)\right\} \\ &= \bigcap \left\{\beta \ / \ \exists f \in {}^{\beta}\alpha \left[\bigcup f[\beta] = \alpha\right]\right\} \end{aligned}$$

Prueba: Los incisos **1**, **2** y el "regreso" de **3** son inmediatos de los ejemplos anteriores. Para la "ida" en **3**, si f es testigo de que el 1 es cofinal en α, basta tomar $\gamma = f(1)$. Para **5**, no hay nada que decir, todo se sigue de lo antes visto. Veamos **4**. Si $\alpha \notin LIM$, entonces por **2** y **3** tenemos que $cof(\alpha) \notin LIM$. Ahora supongamos que $\alpha \in LIM$. Puesto que $\alpha \ne 0$, tenemos que $cof(\alpha) \ne 0$. Nos falta ver que $cof(\alpha)$ no es un ordinal sucesor y esto es una consecuencia de que si β^+ fuera cofinal en α, entonces también lo sería β. La prueba no es difícil, solo comentaremos que si f es un testigo de la cofinalidad de β^+ en α, entonces $f \restriction \beta$ es testigo de que β es cofinal en α (pues $f[\beta]$ es confinal con α). †

Ejemplos:

1) $cof(\omega) = \omega$
2) $cof(\omega + \omega) = \omega$
3) $cof(\aleph_\omega) = \omega$
4) $cof(\aleph_{\omega+\omega}) = \omega$
5) $cof(\aleph_{\varepsilon_0}) = \omega$
6) Si $\alpha \in LIM$, $cof(\aleph_\alpha) \leq \alpha$
7) $cof(\omega_1) = \omega_1$ (**AEN**)

Definición$_4$. Sea $\alpha \in OR$.

α es un *Ordinal Regular* syss $cof(\alpha) = \alpha$

α es un *Ordinal Singular* syss $cof(\alpha) < \alpha$

Ejemplos:

	regulares	singulares
	0	α^+ para $\alpha > 1$
	1	$\omega + \omega$
	ω	$\aleph_\omega$
(**AEN**)	ω_1	$\aleph_{\varepsilon_0}$

Un bonito ejercicio es probar que el primer punto fijo de la funcional $\aleph$ es singular.