La cofinalidad no es simétrica, por ejemplo ω es cofinal en $28,$ pero no al revés; otro ejemplo, bajo la suposición del **AEN**, es: ω_1 es cofinal en $\omega.$ Tampoco es transitiva: el 1 es cofinal en ω^+ y ω^+ es cofinal en $\omega,$ sin embargo el 1 no es cofinal en $\omega.$ Se puede dar la transitiva en algunos casos, veamos algunos que nos ayudarán a obtener resultados importantes para las propiedades de la cofinalidad. Antes, un poco de,

NOTACIÓN:

$\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha$ syss f es testigo de la cofinalidad de α en β y f es monótona.

$\beta \hookrightarrow \alpha$ syss $\exists f\left[\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha\right].$

Proposición$_5$. Si γ es cofinal en β y $\beta \hookrightarrow \alpha$ entonces γ es cofinal en $\alpha,$ y por tanto $cof(\alpha) \leq \gamma.$
Prueba: Sea $g : \gamma \to \beta,$ testigo de la cofinalidad, y sea f tal que $\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha.$ Así, la función composición $f \circ g,$ es un testigo de que γ es cofinal en $\alpha.$ †

Proposición$_6$. Si δ es cofinal en α y $\beta \hookrightarrow \alpha$ entonces δ es cofinal en $\beta,$ y por tanto $cof(\beta) \leq \delta.$
Prueba: Sea $g : \delta \to \alpha,$ testigo de la cofinalidad de δ en $\alpha,$ y sea f tal que $\beta \underset{f}{\hookrightarrow} \alpha.$
Definimos,

$$h : \delta \to \beta$$
$$\forall \xi \in \delta, \quad h(\xi) = \bigcap \left\{\nu \in \beta \ / \ f(\nu) \geq g(\xi)\right\}$$

Observese que h está bien definida, debido a que $f[\beta]$ y α son confinales.
Veamos que h es un testigo de que δ es cofinal en β :
Sea $\nu_0 \in \beta.$ Así $f(\nu_0) \in \alpha$ y como $g[\delta]$ y α son confinales, entonces hay un $\xi_0 \in \delta$ tal que $g(\xi_0) \geq f(\nu_0).$ Veamos que $h(\xi_0) \geq \nu_0.$ De la definición de $h,$ se tiene que $h(\xi_0) \in \beta$ con la propiedad de que $f(h(\xi_0)) \geq g(\xi_0).$ Ahora bien, como $g(\xi_0) \geq f(\nu_0),$ tenemos que $f(h(\xi_0)) \geq f(\nu_0)$ y debido a la monotonía de $f,$ $h(\xi_0) \geq \nu_0.$ †

Corolario$_7$. Si $\beta \hookrightarrow \alpha$ entonces $cof(\beta) = cof(\alpha).$
Prueba: Supongamos pues que, $\beta \hookrightarrow \alpha.$ Por un lado, debido a que $cof(\beta)$ es cofinal en β, por la **Proposición$_5$**, $cof(\alpha) \leq cof(\beta).$ Por otro lado, tenemos que $cof(\alpha)$ es cofinal en α así, por la **Proposición$_6$**, $cof(\beta) \leq cof(\alpha).$ †

Corolario$_8$. Si $\alpha \in LIM,$ entonces $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha).$
Prueba: Pues $\alpha \hookrightarrow \aleph_\alpha.$ †

Proposición$_9$. $cof(\alpha) \hookrightarrow \alpha$.
Es decir, hay una f tal que

$$f : cof(\alpha) \to \alpha$$

i) $f[cof(\alpha)]$ y α son confinales
ii) f es monótona

Prueba: Si α es el cero o es un sucesor, el resultado es inmediato.
Supongamos pues que, $\alpha \in LIM$ y sea $\beta = cof(\alpha)$ (así, $\beta \in LIM$). Por definición, hay (al menos) una $g : \beta \to \alpha$ tal que $\bigcup g[\beta] = \alpha$. Definimos recursivamente,

$$f : \beta \to OR$$
$$\forall \xi < \beta \quad f(\xi) = max\left\{g(\xi)\,,\,\left(\bigcup f[\xi]\right)^+\right\}$$

El hecho de que sea función se debe al esquema general de recursión para ordinales (¡verificarlo!).

Af$_1$. $f[\beta] \subseteq \alpha$. Es decir, $f : \beta \to \alpha$.
Veamos que $\forall \xi \in \beta\, [f(\xi) \in \alpha]$ y esto lo haremos por inducción sobre β (1a. forma).
Sea pues $\xi \in \beta$, nuestra Hipótesis Inductiva afirma que

$$\forall \nu < \xi \left[\, f(\nu) \in \alpha \,\right]$$

veamos que $f(\xi) \in \alpha$. Sabemos que $f(\xi) = max\left\{g(\xi), \left(\bigcup f[\xi]\right)^+\right\}$.
Por un lado, $g(\xi) \in \alpha$. Por otro lado, la H.I. nos dice que α es cota superior de $f[\xi]$ y por tanto $\bigcup f[\xi] \leq \alpha$; pero no es el caso que $\bigcup f[\xi] = \alpha$, pues entonces tendríamos que ξ sería cofinal en α siendo que $\xi < \beta = cof(a)$; por tanto $\bigcup f[\xi] < \alpha$, finalmente puesto que $\alpha \in LIM$, $\left(\bigcup f[\xi]\right)^+ < \alpha$. Con todo esto, concluimos que
$max\left\{g(\xi), \left(\bigcup f[\xi]\right)^+\right\} = f(\xi) \in \alpha$.

Af$_2$. $f[\beta]$ es no–acotada en α :
Sea pues $\nu \in \alpha$. Como $g[\beta]$ es no–acotada en α, hay un $\xi_0 \in \beta$ tal que $g(\xi_0) > \nu$.
Ahora bien, como $f(\xi_0) = max\left\{g(\xi_o), \left(\bigcup f[\xi_0]\right)^+\right\}$, tenemos que $f(\xi_0) \geq g(\xi_0)$, resumiendo, tenemos $\nu < f(\xi_0)$ con $\xi_0 \in \beta$.

Af$_3$. f es monótona :
Sean $\xi_1, \xi_2 \in \beta$ con $\xi_1 < \xi_2$ veamos que $f(\xi_1) < f(\xi_2)$. Por un lado, tenemos que

$$f(\xi_2) = max\left\{g(\xi_2), \left(\bigcup f[\xi_2]\right)^+\right\}$$

por lo que $f(\xi_2) \geq \left(\bigcup f[\xi_2]\right)^+$ $(*)$.
Por otro lado, puesto que $\xi_1 \in \xi_2$, tenemos que $f(\xi_1) \in f[\xi_2]$, por propiedades de la unión, $f(\xi_1) \leq \bigcup f[\xi_2]$ y de aquí que $f(\xi_1) < \left(\bigcup f[\xi_2]\right)^+$ $(**)$.
Finalmente, de $(*)$ y $(**)$, tenemos que $f(\xi_1) < f(\xi_2)$. †

Corolario$_{10}$. $cof(cof(\alpha)) = cof(\alpha)$.
Prueba: Inmediato de la proposición anterior y el **Corolario$_7$**. †

Corolario$_{11}$. $cof(\alpha) \in CAR \cup 2$.

Prueba: Teniendo en cuenta **Proposición**$_{4.1}$ y el corolario anterior:

$$cof(\alpha) = cof\big(\ cof(\alpha)\ \big) \leq \big|\ cof(\alpha)\ \big| \leq cof(\alpha)$$

con lo que concluimos que $cof(\alpha) = \big|\ cof(\alpha)\ \big|$. El resultado se desprende ahora considerando los 3 casos posibles para α. †

Corolario$_{12}$. $cof(\alpha)$ es un cardinal regular.

Corolario$_{13}$. a) Si α es regular entonces $\alpha \in CAR \cup 2$

b) $\forall\alpha\forall\kappa\big[\kappa < \alpha < \kappa^{+} \rightarrow \alpha$ es singular$\big]$

La noción $\beta \hookrightarrow \alpha$, nos trae a la mente la idea de sucesión convergente, recordemos ello y veamos su relación en particular cuando $\alpha \in LIM$ y más interesante, cuando $\alpha \in CAR$.

Definición$_5$. Sea $\beta \in OR$.

1. s es una *Sucesión de Longitud* β, *de Ordinales,* en breve una β*–Sucesión,* syss $s : \beta \rightarrow OR$.
Algunas veces usaremos la siguiente notación:

$$\big\langle \gamma_{\xi}\ /\ \xi < \beta \big\rangle \quad \text{o} \quad \big\langle\ \gamma_{\xi}\ \big\rangle_{\xi<\beta}$$

para denotar a s, teniendo en mente que $s(\xi) = \gamma_{\xi}$.

2. Sea $s = \big\langle \gamma_{\xi}\ /\ \xi < \beta \big\rangle$ una β–sucesión. s es *(Estrictamente) Creciente* syss para $\xi_1 < \xi_2 < \beta$, se tiene que $\gamma_{\xi_1} < \gamma_{\xi_2}$.

3. Sea $\beta \in LIM$, $s = \big\langle \gamma_{\xi}\ /\ \xi < \beta \big\rangle$ una β–sucesión creciente y $\alpha \in OR$ tal, que

$$\alpha = \bigcup s[\beta] = \bigcup_{\xi<\beta} \gamma_{\xi} = \underset{\xi<\beta}{Sup}\ \gamma_{\xi}$$

Escribiremos:

$$\lim_{\xi<\beta} \gamma_{\xi} = \lim_{\xi\rightarrow\beta} \gamma_{\xi} = \alpha$$

y diremos que α es el *Límite de* s o que la sucesión s *Converge* a α.
Obérvese que en este caso, $\alpha \in LIM$ y además $\beta \leq \alpha$.

Con esta notación tenemos: Sea $\alpha \in LIM$.
$\beta \hookrightarrow \alpha$ syss hay una β–sucesión creciente convergente a α, dicho de otra manera: hay una β–sucesión creciente $\big\langle \gamma_{\xi}\ /\ \xi < \beta \big\rangle$ tal, que $\lim_{\xi<\beta} \gamma_{\xi} = \alpha$.

¿Cómo queda expresada la cofinalidad, de α, en términos de sucesiones

crecientes?
R: Es la $\in$–menor longitud de las sucesiones crecientes, que convergen a α.

Un primer resultado, es:

Proposición$_{14}$. Sea $\alpha \in LIM$.

1. α es singular syss
Hay una sucesión creciente convergente a α de longitud menor a α. En símbolos:
Hay una β–sucesión creciente $\left\langle \gamma_\xi \;/\; \xi < \beta \right\rangle$ tal que $\lim\limits_{\xi<\beta} \gamma_\xi = \alpha$ con $\beta < \alpha$.

2. α es regular syss
Toda sucesión creciente convergente a α, tiene longitud α. En símbolos:
Toda β–sucesión creciente $\left\langle \gamma_\xi \;/\; \xi < \beta \right\rangle$ con $\lim\limits_{\xi<\beta} \gamma_\xi = \alpha$, se tiene $\beta = \alpha$.

Proposición$_{15}$. Sea $\kappa \geq \omega$.
κ es la unión de $cof(\kappa)$ conjuntos, cada uno de cardinal menor a κ.

Prueba: Sea $\lambda = cof(\kappa)$. Puesto que $\lambda \hookrightarrow \kappa$, hay una λ–sucesión creciente $\left\langle \gamma_\xi \;/\; \xi < \lambda \right\rangle$ tal que $\kappa = \lim\limits_{\xi<\lambda} \gamma_\xi$. Así $\kappa = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} \gamma_\xi$ con $\lambda \leq \kappa$ y $\left| \gamma_\xi \right| \leq \gamma_\xi < \kappa$. †

Proposición$_{16}$. Sea $\kappa \geq \omega$.

1. κ es singular syss
κ es la unión de menos de κ conjuntos, cada uno de cardinal menor a κ.

2. κ es regular syss
la unión de menos de κ conjuntos, cada uno de cardinal menor a κ es menor a κ.

Prueba: La parte **2** sale de **1**. La condición de suficiencia es inmediata de la proposición anterior. Veamos la necesidad; supongamos pues, que $\kappa = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} a_\xi$ con $\lambda < \kappa$ y $\left| a_{\xi_0} \right| < \kappa$. Tenemos dos casos:
Si todos los a_ξ son acotados en κ. Al tomar sus supremos, obtenemos que λ es cofinal con κ $\left(\forall \xi < \lambda,\ \xi \mapsto \bigcup a_\xi \right)$.
Supongamos ahora que, hay un $\xi_0 < \lambda$ tal que a_{ξ_0} es no–acotado en κ. Pongamos que $\mu = \left| a_{\xi_0} \right|$. Así, μ es cofinal con κ (cualquier biyección de μ en a_{ξ_0} es testigo de ello). Teniendo pues, que $\mu = \left| a_{\xi_0} \right| < k$.
En ambos casos, hay un ordinal (cardinal) menor a κ que es cofinal en κ. †

Proposición$_{17}$(AE). Sea $\kappa \geq w$.
κ es la suma de $cof(\kappa)$ cardinales, cada uno menor a κ.

Prueba: Sean $\lambda = cof(\kappa)$ y $\left\langle \gamma_\xi \ / \ \xi < \lambda \right\rangle$ una λ–sucesión creciente tal, que $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} \gamma_\xi$.

Pongamos, para cada $\xi < \lambda$, $a_\xi = \gamma_\xi \setminus \bigcup_{\nu<\xi} \gamma_\nu$. Así,

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} \gamma_\xi = \bigcup_{\xi<\lambda} a_\xi \underset{\mathbf{AE}}{=} \sum_{\xi<\lambda} \left| a_\xi \right|$$

con $\left| a_\xi \right| \leq \left| \gamma_\xi \right| \leq \gamma_\xi < \kappa$. †

Proposición$_{18}$(AE). Sea $\kappa \geq \omega$.

1. κ es singular syss
κ es la suma de menos de κ cardinales, cada uno menor a κ.

2. κ es regular syss
la suma de menos de κ cardinales, cada uno menor a κ, es menor a κ.

Prueba: Veamos **1**. Si κ es singular el resultado se sigue de la proposición anterior. Supongamos que $\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ con $\lambda < \kappa$ y para toda $\xi < \lambda$, $\kappa_\xi < \kappa$. Sabemos que $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda \cdot \underset{\xi<\lambda}{Sup}\ \kappa_\xi$ y como $\lambda < \kappa$, forzosamente $\kappa = \underset{\xi<\lambda}{Sup}\ \kappa_\xi$; finalmente usando la **Proposición$_{16.1}$** al hecho de que $\kappa_\xi < \kappa$ para todo $\xi < \lambda$, tenemos que κ es singular. †

Proposición$_{19}$(AE).

1. $\forall \kappa \geq \omega \left[\kappa^+ \text{ es regular} \right]$.

2. $\forall \kappa \geq \omega \left[\kappa \text{ es singular} \rightarrow \kappa \text{ es límite} \right]$.

Prueba: **2** es inmediato de **1**. Sea $\kappa \geq \omega$ y supongamos, con la intensión de llegar a una contradicción, que κ^+ es singular. Por la proposición anterior tenemos:

$$\kappa^+ = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$$

con $\lambda < \kappa$ y para toda $\xi < \lambda$, $\kappa_\xi < \kappa$. Pero entonces,

$$\kappa^+ = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \sum_{\xi<\lambda} \kappa = \lambda \cdot \kappa = \kappa$$

Lo cual es contradictorio y por tanto κ^+ es regular. †

Los ejemplos que hemos dado de cardinales límites e incontables han sido de cardinales singulares, de hecho la clase de los cardinales límites y singulares son "confinales" con CAR (¡verifíquelo!). Una pregunta natural es ¿Hay cardinales incontables, límites y regulares?

Supongamos que $\alpha \in LIM$, así,

$$\aleph_\alpha = \lim_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$$

Lo que nos dice esto es que, $\left\langle \aleph_\beta \ / \ \beta < \alpha \right\rangle$ es una α–sucesión creciente convergente a $\aleph_\alpha$. SI $\aleph_\alpha$ fuera regular, por la **Proposición**$_{14.2}$, tendríamos que $\alpha = \aleph_\alpha$. Es decir, $\aleph_\alpha$ es un punto fijo de la funcional $\aleph$ y por tanto, ¡muy grande! Otra prueba de esto es:

$$\alpha \leq \aleph_\alpha = cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha) \leq \alpha$$

Pero ¿Qué tan grande debe ser? ya que, como sabemos, hay muchos puntos fijos de $\aleph$ que son singulares. Por lo pronto:

Definición$_6$. (**Hausdorff**–**Kuratowski**)
κ es un (*Cardinal Débilmente) Inaccesible* syss

i) $\kappa > \omega$

ii) κ es límite, y

iii) κ es regular.

Pongamos la fórmula conjuntista: $I(k) \rightleftharpoons \kappa$ es *cardinal inaccesible*

Proposición$_{20}$.

- Todo inaccesible es punto fijo de la funcional $\aleph$.
- No todo punto fijo de la funcional $\aleph$ es inaccesible. †

Es **imposible probar** con los axiomas que tenemos hasta ahora – **ZFC** junto con la suposición de su consistencia– la existencia de cardinales con éstas cararterísticas (Gödel 1936). En símbolos:

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow \mathbf{ZFC} \nvdash \exists\kappa I(k)$$

Con esto se obtiene que es consistente, relativamente, el suponer que no los hay. En símbolos:

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZFC} + \neg\exists\kappa I(k))$$

Lo que uno podría pensar o esperar es que el enunciado fuera un indecidible para **ZFC**, bajo la suposición de la consistencia, por supuesto; pero **probar** que

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZFC} + \exists\kappa I(k))$$

o, equivalentemente

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow \mathbf{ZFC} \nvdash \neg\exists\kappa I(k)$$

¡**Es Imposible**! Esto también se **prueba**.

Así, lo que tenemos es que es más probable que no haya cardinales inaccesibles a que sí. Sin embargo el trabajar bajo la suposición de que existen, amén del interés teórico, ha dado luz a problemas no resueltos el interior de la matemática.