Funcionales Normales

En lo que sigue, sea

$$F : OR \to OR$$

Definición$_1$. Un ordinal α es un *Punto Fijo de* F syss $F(\alpha) = \alpha$.

¿Bajo qué condiciones, una funcional tiene puntos fijos? Recordar:

a) F es monótona syss $\forall \alpha, \beta \left[\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta) \right]$.

b) Si F es monótona, entonces $\forall \alpha \left[\alpha \leq F(\alpha) \right]$.

Una funcional monótona es buen candidato a tener puntos fijos. Un ejemplo "exagerado" es la identidad, Id_{OR}, es monótona y cada ordinal es un punto fijo. Sin embargo, la monotonía no es suficiente, p.e. la sucesor (para OR), $\_^+ \restriction OR$, es monótona pero no tiene un solo punto fijo.

Observemos que si $\beta \in LIM$ y F es monótona, para todo $\xi < \beta$ se tiene que $F(\xi) \leq F(\beta)$ por lo que,

$$\bigcup \left\{ F(\xi) \ / \ \xi < \beta \right\} \leq F(\beta)$$

Definición$_2$. La funcional F es *Continua* syss

$$\forall \beta \in LIM \left[F(\beta) = \bigcup \left\{ F(\xi) \ / \ \xi < \beta \right\} \right]$$

Si la funcional F es monótona, gracias a la obsevación anterior, basta pedir para ordinales límites β se tenga

$$F(\beta) \leq \bigcup \left\{ F(\xi) \ / \ \xi < \beta \right\}$$

para tener la continuidad de F.

Ejemplos:

1) $\_^+ \restriction OR$ es monótona, pero no es continua.

2) Una funcional constante, p.e. $F(\alpha) = \omega$, es continua, no es monótona y tiene a ω como único punto fijo.

3) La funcional suma por un ordinal fijo, $\sum_\gamma$, es monótona y continua:

a) $\alpha < \beta \to \sum_\gamma(\alpha) < \sum_\gamma(\beta)$ y

b) $\beta \in LIM \rightarrow \sum_{\gamma}(\beta) = \bigcup\left\{\sum_{\gamma}(\xi) \ / \ \xi < \beta\right\}$.

4) La funcional aleph, $\aleph$, es monótona y continua.

Un resultado que nos simplificará las cosas:

Proposición$_1$.

1. Si F es monótona, entonces $\forall\alpha\left[F(\alpha) < F(\alpha^+)\right]$.
2. Si F es continua y $\forall\alpha\left[F(\alpha) < F(\alpha^+)\right]$, entonces F es monótona.

Prueba:

1] Inmediata de la definición de monotonía.

2] Sean $\alpha \in OR$ y

$$\varphi(\beta) \leftrightharpoons \left[\alpha < \beta \rightarrow F(\alpha) < F(\beta)\right].$$

Basta probar que $\forall\beta\, \varphi(\beta)$ y esto lo haremos por indución para OR.

$\varphi(0)$] Este caso es trivialmente cierto.

$\forall\beta\, [\varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\beta^+)]$] Sea $\beta \in OR$. Supongamos que $\varphi(\beta)$ y que $\alpha < \beta^+$. De esto último tenemos, $\alpha \leq \beta$. De la **H.I.** y de que F es funcional concluimos que $F(\alpha) \leq F(\beta)$. Finalmente, usando la segunda hipótesis, $F(\alpha) \leq F(\beta) < F(\beta^+)$.

$\forall\beta \in LIM\left[\left(\forall\xi < \beta\, \varphi(\xi)\right) \rightarrow \varphi(\beta)\right]$] Sea $\beta \in LIM$ y supongamos, inductivamente, que $\forall\xi < \beta\, \varphi(\xi)$. Ahora supongamos también que $\alpha < \beta$. Puesto que $\beta \in LIM$, tenemos que $\alpha < \alpha^+ < \beta$. Con todo esto obtenemos,

$$F(\alpha) \underset{\text{H.I.}}{<} F(\alpha^+) \leq \bigcup\left\{F(\gamma) \ / \ \gamma < \beta\right\} \underset{F \text{ cont}}{=} F(\beta)$$

†

Definición$_3$. (Veblen 1908). Diremos que F es una *(Funcional) Normal* syss F es monótona y continua. Es decir,

1. $\forall\alpha, \beta\left[\alpha < \beta \rightarrow F(\alpha) < F(\beta)\right]$ y
2. $\forall\beta \in LIM\left[F(\beta) = \bigcup\left\{F(\xi) \ / \ \xi < \beta\right\}\right]$

Proposición$_2$. Una funcional normal tiene puntos fijos arbitrariamente grandes. Es decir

$$\forall\alpha\, \exists\beta\left[\alpha \leq \beta \ \& \ F(\beta) = \beta\right]$$

Prueba: Sea α un ordinal arbitrario. Si fuera el caso que $F(\alpha) = \alpha$, basta tomar a $\beta = \alpha$. Supongamos pues, que no es el caso.

Definimos la función g, por recursión sobre ω, como sigue,

$$g : \omega \to OR$$

I. $g(0) = \alpha$

II. $\forall n \in \omega,\ g(n^{+}) = F(g(n))$

Sea $\beta = \bigcup\left\{g(n)\ /\ n \in \omega\right\}$. Afirmamos que $F(\beta) = \beta$.

Algunas propiedades que tenemos, gracias a las definiciones anteriores, son:

1. $\alpha < F(\alpha)$. Pues, por la monotonía de F se tiene que $\alpha \leq F(\alpha)$ y de nuestra suposición, $F(\alpha) \neq \alpha$.

2. La función g es monótona (**TAREA**) y por tanto $\beta \notin \left\{g(n)\ /\ n \in \omega\right\}$.

3. $\alpha = g(0) \underset{p\in\omega}{<} g(p^{+}) < \bigcup\left\{g(n)\ /\ n \in \omega\right\} = \beta \leq F(\beta)$.

4. $\beta \in LIM$. Pues si $\gamma \in \beta = \bigcup\left\{g(n)\ /\ n \in \omega\right\}$, hay un $n_0 \in \omega$ tal que $\gamma \in g(n_0)$; pero entonces

$$\gamma < \gamma^{+} \leq g(n_0) < \beta$$

y resulta que β es cerrado bajo sucesores.

Para ver que β es punto fijo de F, solo nos falta ver que $F(\beta) \leq \beta$.

Sea $\gamma \in F(\beta)$. Puesto que F es continua, hay un $\xi_0 < \beta$ tal, que $\gamma < F(\xi_0)$. Ahora bien, dada la definición de β, para este ξ_0 hay un $n_1 \in \omega$ con la propiedad de que $\xi_0 < g(n_1)$. Con esto tenemos la siguiente inecuación,

$$\gamma < F(\xi_0) < F(g(n_1)) = g(n_1^{+}) \leq \beta$$

†

Esta prueba es eficiente en el sentido de que nos proporciona el primer punto fijo de F que es mayor o igual a α (**TAREA**).

Proposición$_3$. Sean F una Funcional Normal y a un conjunto no–vacío de Ordinales. Así,

$$F\left(\bigcup a\right) = \bigcup\left\{F(\xi)\ /\ \xi \in a\right\}$$

Prueba: **TAREA**. †

Usando el resultado anterior, podemos dar otra prueba de que $F(\beta) = \beta$, en la **Proposición**$_2$.

TAREA

1. Si F es continua y $\forall\alpha \left[F(\alpha) < F(\alpha^+) \right]$, entonces F es monótona.

2. Considera la prueba de la **Proposición**$_2$. Prueba:

a. La función g es monótona. **Sug**. usar inducción y usar que $\alpha < F(\alpha)$ y que F es monótona.

b. β es el primer punto fijo de F que es $\geq \alpha$.

3. Prueba la **Proposición**$_3$. **Sug**. Si $\beta = \bigcup a$, considerar el caso en que $\beta \in a$ y en el que $\beta \notin a$.

4. Usando **3**. da otra prueba de la **Proposición**$_2$.