Primer Tarea Examen

Gabriel Cachoa Ocampo

Septiembre, 2016

Ordinales

1. Si A es una clase no vacía de ordinales, demuestre: (1) $\bigcap A \in OR$, (2) $\bigcap A = infA$ y (3) $\bigcap A = minA$.

2. Decimos que un conjunto $x \subset OR$ es no acotado si y sólo si para cualquier $\alpha \in x$ existe $\beta \in x$ tal que $\alpha < \beta$.
Demuestre que si $x \neq \emptyset$ es un subconjunto no acotado de ordinales entonces $\bigcup x$ es un ordinal límite.

3. Demuestre que $\forall \alpha \exists \beta [\alpha < \beta \wedge \beta \in LIM]$, es decir: existen ordinales límite arbitrariamente grandes.

4. Demuestre que el principio de inducción (Segunda Forma) implica el principio de inducción (Primera Forma).

5. Demuestre que si dos ordinales α, β son isomorfos entonces son iguales. Sugerencia: Considere $\{\gamma \mid h(\gamma) \neq \gamma\}$ donde h es el isomorfismo.

Relaciones Bien Fundadas

6. Demuestre que si R bien funda a A, entonces **no** hay una sucesión infinita $(a_i)_{i \in \omega}$ de elementos de A tal que

$$\forall i \in \omega [a_{i+1} R a_i]$$

También demuestre que la conversa del anterior es cierta bajo la suposición del axioma de elecciones dependientes.
Recuerdar: El axioma de elecciones dependientes dice: si R es una relación en un conjunto no vacío x tal que para todo $a \in x$ existe $b \in x$ con aRb entonces existe una sucesión $(a_n)_{n \in \omega}$ tal que $a_n R a_{n^+}$

7. Demuestre que si A es una clase, R una relacional sobre A y $x, y \subset A$ un conjunto R-transitivo entonces $x \cup y$ y $x \cap y$ son conjuntos R-transitivos.

Órdenes Lineales

8. Demuestre que cualesquiera dos órdenes lineales que cumplan ser acotados superiormente (i.e. con extremo derecho), no acotados inferiormente (i.e. sin extremo izquierdo), tal que todo conjunto superiormente acotado alcanza a su máximo y todo subconjunto inferiormente acotado alcanza a su mínimo son isomorfos.

9. Si $(A, <_A) \in COTO$, denotamos $A^* = (A, <_{A^*})$ el *antiorden de A*. Es decir, $a <_{A^*} b \Leftrightarrow b <_A a$ para cualesquiera $a, b \in A$.
   Demuestre si los siguientes son isomorfos o no: (1) $(\omega^* +_{\mathcal{T}} \omega)^*$ y $\omega +_{\mathcal{T}} \omega^*$ (2) η y η^* (3) λ y $(\lambda +_{\mathcal{T}} 1) \times_{\mathcal{T}} \lambda$

10. Demuestre que si $(A, <_A), (B, <_B) \in COBO$ entonces $A +_{\mathcal{T}} B$ y $A \times_{\mathcal{T}} B$ son buenos órdenes.