ORDINALES

Definición$_1$. Un conjunto x es un *(Número) Ordinal* syss

i) x es transitivo y

ii) $\langle x, \in_x \rangle \in COBO$ (estricto)

Ejemplos:

1. $\forall n \in \omega(n$ es un ordinal$)$.

2. ω es un ordinal.

OjO: $x \in \omega$ syss x es un ordinal y todo subconjunto no–vacío de x tiene un elemento $\in$–máximo.

Notación:

1) $OR = \{x \ / \ x$ es un ordinal$\}$

2) Usaremos letras griegas minúsculas para denotar ordinales:

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (exepto: ε, ω, φ, ψ y ρ)

3) Si φ es una fórmula conjuntista, entonces:

$$\forall\alpha\ \varphi(\alpha) \leftrightharpoons \forall x\ [x \in OR \rightarrow \varphi(x)]$$

$$\exists\alpha\ \varphi(\alpha) \leftrightharpoons \exists x\ [x \in OR \ \&\ \varphi(x)]$$

Proposición$_1$. OR es una clase inductiva, e.d.

1) $0 \in OR$

2) $\forall\alpha\left[\alpha^+ \in OR\right]$

Prueba: Es similar a la que se dió para naturales (directa). †

Así, $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \omega,\ \omega^+,\ (\omega^+)^+, \ldots$ son ordinales.

Proposición$_2$. Todo subconjunto transitivo de un ordinal, es un ordinal:

$$\forall x \forall\alpha\left[x \subseteq \alpha \ \&\ x \text{ es transitivo } \rightarrow x \in OR\right]$$

Prueba: Sean a y α tales que $a \subseteq \alpha$ y a es transitivo. Solo faltaría ver que $\langle a, \in_a \rangle \in COBO$, pero esto es inmediato del hecho de que $\in_a \ = \ \in_\alpha \restriction a$. †

Ejemplo 4. $\forall\alpha,\beta\left[\alpha \cap \beta \in OR\right]$.

Proposición$_3$. OR es una clase transitiva (Todo elemento de un ordinal es un ordinal).

$$\forall x,y\left[x \in y \ \&\ y \in OR \ \rightarrow\ x \in OR\right]$$

Prueba: Supongamos que $x \in \alpha$, veamos que $x \in OR$. Como α es transitivo, $x \subseteq \alpha$; por la proposición anterior nos basta probar que x es transitivo: Sean pues, y y z tales que $z \in y$ y $y \in x$; por la transitividad de α, tenemos que todos, x,y y z son elementos de α y ya que $\in$ es transitiva en α, tenemos que $z \in x$. †

El orden en OR

Veamos ahora el orden que hay entre ordinales. Tenemos que la relacional de pertenencia, $\in$, para los ordinales es irreflexiva, asimétrica y transitiva, e.d. la $\in$ ordena parcialmente a OR. Antes de ver que lo ordena totalmente, veamos la relación que hay con la contención –al igual que con los números naturales– Lo que sabemos hasta ahora es,

$$\alpha \in \beta \rightarrow \alpha \subsetneq \beta,$$
$$(\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \rightarrow \alpha \subseteq \beta$$

Proposición$_4$. **1**) $\forall\alpha,\beta\,[\alpha \subsetneq \beta \rightarrow \alpha \in \beta]$

2) $\forall\alpha,\beta\,[\alpha \subseteq \beta \rightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)]$

Prueba: **2**) es inmediata de **1**), veamos pues esto último. Sean α,β tales que $\alpha \subsetneq \beta$. Así, $\emptyset \neq \beta \setminus \alpha \subseteq \beta$ y como β está bien ordenado por $\in$, tenemos que $\beta \setminus \alpha$ tiene un $\in$–mínimo, digamos γ :

i) $\gamma \in \beta \setminus \alpha$

ii) $\forall x\left[x \in \beta \setminus \alpha \ \rightarrow\ (\gamma \in x) \vee (\gamma = x)\right]$

Af. $\gamma = \alpha$. Y esto lo haremos por doble contención:

$\subseteq$] Sea $x \in \gamma$. Por **i**) y de que β es transitivo, tenemos que $x \in \beta$. Ahora bien, si $x \notin \alpha$, tendríamos, por **ii**), que $\gamma \in x \vee \gamma = x$, pero esto contradiría el hecho de que $\in$ es asimétrica e irreflexiva en β, por tanto $x \in \alpha$.

$\supseteq$] Sea $x \in \alpha$. Como $\alpha \subsetneq \beta$, $x \in \beta$. Tenemos pues, que $x,\gamma \in \beta$ y por la tricotomía de $\in$ en β, tenemos que

$$(x \in \gamma) \vee (\gamma = x) \vee (\gamma \in x)$$

pero es imposible que $(\gamma = x)$ o que $(\gamma \in x)$, pues en tales casos, puesto que $x \in \alpha$ y α es transitivo, tendríamos que $\gamma \in \alpha$, lo que contradiría **i**). Por todo esto, $x \in \gamma$. Finalmente, por **1**), $\alpha = \gamma \in \beta$. †

Concretamos el comentario anterior y este último resultado en el siguiente,

Corolario$_5$. **1**) $\alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$
2) $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)$

Pasemos ahora a ver el orden lineal, para ello:

Proposición$_6$. Dos ordinales son comparables, respecto a la contención.

$$\forall \alpha, \beta \left[(\alpha \subseteq \beta) \ \vee \ (\beta \subseteq \alpha) \right]$$

Prueba: Suponer lo contrario nos lleva a un absurdo. Pues si α y β son ordinales que no cumplen la propiedad tendríamos que

$$\left.\begin{array}{lcccc} \alpha \not\subseteq \beta & \Rightarrow & \alpha \cap \beta \subsetneq \alpha & \Rightarrow & \alpha \cap \beta \in \alpha \\ \text{y} & & & \text{(*) y 5.1} & \\ \beta \not\subseteq \alpha & \Rightarrow & \alpha \cap \beta \subsetneq \beta & \Rightarrow & \alpha \cap \beta \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta \ \ \underset{\circ}{\nabla} !!$$

(*) $\alpha \cap \beta \in OR$, **Ejemplo 4**). †

Corolario$_7$. OR está totalmente ordenado (en forma estricta) por $\in$.

Pasemos ahora a ver la buena ordenación de los ordinales; para ello probaremos algo más general.

Proposición$_8$. *(Principio de Minimalidad para* OR*)*.
Toda clase no–vacía de ordinales tiene un elemento minimal respecto a la $\in$. Formalmente,
Sea φ una fórmula conjuntista. Así,

$$\exists \alpha \ \varphi(\alpha) \to \exists \beta \left[\varphi(\beta) \ \& \ \forall \gamma \ (\gamma \in \beta \to \neg\varphi(\gamma)) \right]$$

Prueba: Sea $\alpha \in OR$ tal que $\varphi(\alpha)$.
Si es el caso que $\forall \gamma(\gamma \in \alpha \to \neg\varphi(\gamma))$, no hay nada que probar; α es el buscado.
Supongamos pues, que $\exists \gamma(\gamma \in \alpha \ \& \ \varphi(\gamma))$. Sea

$$b = \left\{ \gamma \in \alpha \ / \ \varphi(\gamma) \right\}$$

($b \in V$: por el esquema axiomático de comprensión (**ZF**$_6$).)
Tenemos que $\emptyset \neq b \subseteq \alpha$. Puesto que $\in_\alpha$ bien ordena a α, b tiene un elemento $\in$–mínimo, digamos β. Así tenemos:

i) $\beta \in b$

ii) $\forall \gamma \left[\gamma \in \beta \to \gamma \notin b \right]$

o equivalentemente:

i') $\beta \in \alpha$ y $\varphi(\beta)$

ii') $\forall\gamma\Big[\gamma \in \beta \;\rightarrow\; (\gamma \notin \alpha) \vee \neg\varphi(\gamma)\Big]$

Ahora bien, observemos que debido a que $\beta \in \alpha$ y a que α es transitivo, si $\gamma \in \beta$, entonces $\gamma \in \alpha$. Y de aqui que **ii**') se convierte en

$$\forall\gamma\Big[\gamma \in \beta \;\rightarrow\; \neg\varphi(\gamma)\Big]$$

aunado esto con **i**'), tenemos que β es el ordinal buscado. †

Corolario$_9$. OR está bien ordenado (en forma estricta) por $\in$.

Notación: El *orden* entre ordinales lo denotaremos por: $<$ o $\leq$ y queda dado como sigue:

$$\alpha < \beta \;\leftrightharpoons\; \alpha \in \beta \;\leftrightharpoons\; \alpha \subsetneq \beta$$
$$\alpha \leq \beta \;\leftrightharpoons\; \alpha \subseteq \beta \;\leftrightharpoons\; (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)$$

Dos resultados inmediatos son los siguientes.

Corolario$_{10}$. Todo conjunto transitivo de ordinales, es un ordinal.

Corolario$_{11}$. *(Paradoja de Burali-Forti).*

$$OR \notin V$$

Prueba: Pues en caso contrario, OR sería un conjunto transitivo (**Proposición$_3$**) de ordinales y por tanto un ordinal, concluyendo que $OR \in OR$ $\underset{\circ}{\nabla}$ **!!** †

Como es de esperarse –en los buenos órdenes– es cierto un principio de inducción.

Proposición$_{12}$. *Principio de Inducción para OR (Primera Forma)*:
Sea ψ una fórmula conjuntista, así

$$\forall\alpha\left[\forall\beta\Big(\beta < \alpha \;\rightarrow\; \psi(\beta)\Big) \;\rightarrow\; \psi(\alpha)\right] \rightarrow \forall\alpha\, \psi(\alpha)$$

Prueba: Tomar la contrapositiva del Principio de Minimalidad, con $\varphi \leftrightharpoons \neg\Psi$ †

Algunas propiedades de los ordinales

Proposición$_{13}$. Sea a un conjunto de ordinales, $a \subseteq OR$. Así,

1. $\bigcup a \in OR$. (La unión de un conjunto de ordinales es un ordinal)
2. $\bigcup a = sup_{\leq} a$. Es decir:
   i). $\forall \alpha \in a,\ \alpha \leq \bigcup a$ y
   ii). $\forall \beta \left[\forall \alpha \in a(\alpha \leq \beta) \rightarrow \bigcup a \leq \beta \right]$.

Prueba:
1. La unión de un conjunto de conjuntos transitivos es un conjunto transitivo y el resultado se sigue del **Corolario$_{10}$**.
2. Inmediato de las propiedades de la unión y de que $\leq$ es $\subseteq$. †

Proposición$_{14}$. Sea A una clase no–vacía de ordinales, $\emptyset \neq A \subseteq OR$. Así,

1. $\bigcap A \in OR$
2. $\bigcap A = inf\, A = min\, A$. Es decir:
   i). $\forall \alpha \in A \left(\bigcap A \leq \alpha \right)$
   ii). $\forall \beta \left[\forall \alpha \in A(\beta \leq \alpha) \rightarrow \beta \leq \bigcap A \right]$
   iii). $\bigcap A \in A$

Prueba: **TAREA**.

Pasemos ahora a ver como trabaja la funcional sucesor $(\_^{+})$ para los ordinales.

Proposición$_{15}$.

1. $\forall \alpha(\alpha^{+} \in OR)$. Así, $^{+} \restriction OR : OR \rightarrow OR$.
2. $\neg \exists \alpha(\alpha^{+} = 0)$. Es decir, $0 \notin Im(^{+} \restriction OR)$.
3. $\forall \alpha(\alpha < \alpha^{+})$.
4. **a**) $\forall \alpha, \beta \left[\alpha < \beta \rightarrow \alpha^{+} \leq \beta \right]$
   b) $\forall \alpha \neg \exists \beta \left[\alpha < \beta \ \&\ \beta < \alpha^{+} \right]$
   La sucesor, restringida a OR, nos da el sucesor inmediato
5. $\forall \alpha, \beta \left[\alpha < \beta \rightarrow \alpha^{+} < \beta^{+} \right]$: La sucesor, restringida a OR, es monótona
6. $\forall \alpha, \beta \left[\alpha \neq \beta \rightarrow \alpha^{+} \neq \beta^{+} \right]$: La sucesor, restringida a OR, es inyectiva.

Prueba: **1** ya se probó; **2** y **3** se deben a las definiciones de sucesor y del orden entre ordinales. Veamos **4.a**. Supongamos que $\alpha < \beta$, por lo que $\alpha \in \beta$. De esto tenemos, por un lado que $\alpha \subsetneq \beta$ y por otro que, $\{\alpha\} \subseteq \beta$. Así, $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$, es decir, $\alpha^+ \leq \beta$. **4.b** se sigue de **4.a**. Ahora, **5** se sigue de **4.a** y **3**. Finalmente, **6** se sigue de **5** al considerar la tricotomía del orden $(<)$. †

Definición$_{16}$. Sea $\alpha \in OR$, decimos que

α es un *(Ordinal) Sucesor* syss $\exists\beta(\beta^+ = \alpha)$

α es un *(Ordinal) Límite* syss $\alpha \neq 0$ & α no es sucesor

Ejemplos:

1. Son sucesores: $1, 2, 3, \ldots, n^+$ (con $n \in \omega$) y también lo son: $\omega^+, (\omega^+)^+, ((\omega^+)^+)^+$. En general, $\forall\alpha,\ \alpha^+$ es sucesor.

2. El 0 y ω no son sucesores.

3. ω es límite.

4. El 0 no es límite.

Con estas definiciones tenemos que para un ordinal α, se cumple uno y solo uno de los siguientes casos,

a) $\alpha = 0$, o

b) α es sucesor , o

c) α es límite.

La existencia de un ordinal límite – a saber ω – nos la garantiza el axioma de Infinito (**ZF**$_7$) pero, ¿hay otros ordinales límites? La respuesta es sí; basados en el Axioma de Fraenkel, el esquema axiomático de sustitución (**ZF**$_8$).

En **Z**$^{-}$, el esquema de recursión para ω nos garantiza la existencia (y unicidad) de una funcional F tal, que

$$F : \omega \longrightarrow OR$$

i) $F(0) = \omega$

ii) $\forall n \in \omega,\ F(n^+) = (F(n))^+$

Por **ZF**$_8$, tenemos que $F[\omega] \in V$ y puesto que es de ordinales, $\bigcup F[\omega]$ es un ordinal. No es difícil verificar que es un límite distinto de ω. (A este ordinal, más adelante lo llamaremos $\omega + \omega$ o también $\omega \cdot 2$).

Notación: $LIM = \left\{\alpha \ / \ \alpha \text{ es límite}\right\}$.

La clase de los ordinales límites es propia. El razonamiento que hicimos para encontrar otro distinto de ω, se puede generalizar.

Proposición$_{17}$. (LIM es confinal con OR)

$$\forall\alpha\,\exists\beta\left[\beta\in LIM\ \&\ \beta>\alpha\right]$$

Prueba: **TAREA**. †

Corolario$_{18}$. $LIM\notin V$.

Pasemos ahora a ver un par de propiedades de los ordinales límites. La primera es que son cerrados bajo la operación sucesor.

Proposición$_{19}$.

1. $\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \rightarrow\ \forall\beta\left(\beta<\alpha\ \rightarrow\ \beta^{+}<\alpha\right)\right]$
2. $\forall\alpha\left[\forall\beta\left(\beta<\alpha\ \rightarrow\ \beta^{+}<\alpha\right)\ \&\ \alpha\neq 0\ \rightarrow\ \alpha\in LIM\right]$

Prueba:
1. Supongamos que $\beta<\alpha$. Por la **Proposición$_{15.4}$**, tenemos que $\beta^{+}\leq\alpha$, Pero si $\alpha\in LIM$, es imposible que $\beta^{+}=\alpha$, por lo tanto $\beta^{+}<\alpha$.
2. La contrapositiva es inmediata al negar la definición de límite. †

Proposición$_{20}$. $\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \leftrightarrow\ \alpha \text{ es inductivo}\right]$

Prueba: la "ida" es inmediata de la proposición anterior y del hecho de que para cualquier ordinal $\beta\neq 0$, se tiene que $0\in\beta$. Veamos el regreso. Supongamos que α es inductivo, así $0\in\alpha$ y por tanto $\alpha\neq 0$; y como $\forall\beta\,[\beta\in\alpha\rightarrow\beta^{+}\in\alpha]$, tenemos que α no puede ser sucesor. †

Corolario$_{21}$. El primer ordinal límite es ω. En símbolos:

$$\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \rightarrow\ \omega\leq\alpha\right] \text{ o, equivalentemente, } \bigcap LIM=\omega$$

Veamos ahora como trabaja la unión sobre los ordinales.

Proposición$_{22}$.

1. $\bigcup 0=0$
2. $\bigcup\alpha^{+}=\alpha$
3. **a**. $\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \rightarrow\ \bigcup\alpha=\alpha\right]$.

   b. $\forall\alpha\left[\bigcup\alpha=\alpha\ \&\ \alpha\neq 0\ \rightarrow\ \alpha\in LIM\right]$.

Prueba: **1** y **2** son inmediatas de las definiciones y propiedades básicas.
3.a. Puesto que α es transitivo, tenemos que $\bigcup \alpha \subseteq \alpha.$ Veamos la otra contención; sea $\beta \in \alpha,$ ahora bien, si $\alpha \in LIM,$ entonces, por la **Proposición$_{19.1}$**, $\beta^+ < \alpha.$ Tenemos pues, $\beta \in \beta^+ \in \alpha$. Por tanto, $\beta \in \bigcup \alpha$.
3.b. Procedamos por contrapositiva. Supongamos que $\alpha \notin LIM$. Así $\alpha = 0$ o hay un β tal que $\beta^+ = \alpha.$ En el primer caso, ya terminamos; en el otro,

$$\bigcup \alpha = \bigcup (\beta^+) = \beta < \beta^+ = \alpha$$

por lo que $\bigcup \alpha \neq \alpha.$ †

Proposición$_{23}$. *Principio de Inducción para OR (Segunda forma)*.
Sea φ una fórmula conjuntista.
Si

i). $\varphi(0),$

ii). $\forall \alpha \left[\varphi(\alpha) \;\rightarrow\; \varphi(\alpha^+) \right]$ y

iii). $\forall \alpha \in LIM \left[\forall \beta(\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \;\rightarrow\; \varphi(\alpha) \right],$

entonces

$$\forall \alpha\, \varphi(\alpha)$$

Prueba: Supongamos que φ es una fórmula que cumple con **i**), **ii**) y **iii**). Queremos probar que $\forall \alpha\, \varphi(\alpha)$ y para esto usaremos la primera forma del Principio de Inducción. Supongamos pues, que α es un ordinal arbitrario, que cumple con:

$$\forall \beta \left[\beta < \alpha \;\rightarrow\; \varphi(\beta) \right] \qquad \textbf{HI}$$

probemos que $\varphi(\alpha).$ Debido a la naturaleza de $\alpha,$ tenemos 3 casos posibles,

$\alpha = 0 \,]$ Por **i**), tenemos $\varphi(0),$ es decir $\varphi(\alpha).$

$\alpha = \beta^+ \,]$ Sabemos que $\beta < \beta^+ = \alpha,$ por **HI**, $\varphi(\beta)$ y ahora por **ii**), tenemos $\varphi(\beta^+),$ es decir $\varphi(\alpha).$

$\alpha \in LIM \,]$ $\varphi(\alpha)$ se sigue de **iii**) y de la **HI**. †