

## Preliminares a Recursión General

En lo que sigue, sean  $A$  una clase y  $R$  una relacional.

**Definición<sub>1</sub>.** Un conjunto  $a$  es  $R$ -Transitivo syss

$$\forall x, y \left[ (x \in a \ \& \ yRx) \rightarrow y \in a \right]$$

**OJO:**  $a$  es transitivo syss  $a$  es  $\in$ -transitivo.

**Definición<sub>2</sub>.**

1. El  $R$ -Segmento Inicial (Propio) determinado por  $a$  es la clase de todos los  $R$ -predecesores de  $a$ , excepto por  $a$  mismo.

$$a_R = \left\{ w / wRa \ \& \ w \neq a \right\}$$

2.  $R$  es Izquierda Limitada sobre  $A$  syss todos los segmentos iniciales son conjuntos.

$$\forall x \in A \ [x_R \in V]$$

**OJO:**

1.  $a_\in = \left\{ w / w \in a \ \& \ w \neq a \right\} \subseteq a$
2.  $a_\in \underset{\text{ABF}}{=} \left\{ w / w \in a \right\} = a$
3.  $a$  es  $R$ -transitivo syss  $\forall x \in a \ [x_R \subseteq a]$
4. Si  $a \notin \text{CMP}(R)$ , entonces  $a_R = \emptyset$
5. Si  $\Omega = \left\{ \Omega \right\}$ , entonces  $\Omega_\in = \emptyset$

**Proposición<sub>3</sub>.** Si  $R$  es izquierda limitada sobre  $A$  y  $\text{CMP}(R) \subseteq A$ , entonces para cada conjunto  $a$ , hay un (único) conjunto  $b$  tal, que

- 1)  $b \supseteq a$
- 2)  $b$  es  $R$ -transitivo
- 3)  $\forall c \left[ c \supseteq a \ \& \ c \text{ es } R\text{-transitivo} \rightarrow c \supseteq b \right]$

**Prueba:** Por el teorema de recursión para  $\omega$ , hay una (única) función  $f$  tal, que

$$f: \omega \rightarrow V$$

- (i)  $f(0) = a$
- (ii)  $\forall n \in \omega, f(n^+) = \bigcup \left\{ x_R / x \in f(n) \right\}$

observemos que, gracias a que  $R$  es izquierda limitada y al axioma de reemplazo se tiene que  $\{x_R / x \in f(n)\} \in V$ .

Sea  $b = \bigcup_{n \in \omega} f(n)$ . El conjunto  $b$  es el buscado, pues

$$1) \left] a = f(0) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} f(n) = b.$$

2)  $\left]$  Sean  $u$  y  $v$  tales que  $uRv$  y  $v \in b$ . Hay un  $n_0 \in \omega$  tal que  $v \in f(n_0)$ ; ahora, teniendo en cuenta que  $u \in v_R$ , tenemos que  $u \in \bigcup \{x_R / x \in f(n_0)\} = f(n_0^+)$  y por tanto  $u \in b$ .

3)  $\left]$  Sea  $c$  un conjunto  $R$ -transitivo tal que  $c \supseteq a$ . Debemos probar que

$$c \supseteq b = \bigcup_{n \in \omega} f(n)$$

que por las propiedades de la unión, basta ver que  $\forall n \in \omega [c \supseteq f(n)]$  y esto lo haremos por inducción (1a. forma) para  $\omega$  :

$$I. \left] f(0) = a \subseteq c.$$

II.  $\left]$  Sea  $n \in \omega$  y supongamos inductivamente que  $f(n) \subseteq c$ , veamos que

$f(n^+) \subseteq c$ . Sea  $u \in f(n^+)$ , es decir,  $u \in \bigcup \{x_R / x \in f(n)\}$ . Hay pues un  $v \in f(n)$  tal que  $u \in v_R$ . Usando la H.I., tenemos que  $v \in c$  y como  $c$  es  $R$ -transitivo, entonces  $v_R \subseteq c$  y por tanto  $u \in c$ . †

**Notación:** Al conjunto  $b$  se le llama *la Clausura  $R$ -Transitiva de  $a$*  y se denotará por  $CT_R(a)$ . En el caso particular de la relacional  $\in$  le llamaremos, *la Clausura Transitiva de  $a$*  y pondremos simplemente,  $CT(a)$ .

Pasamos a dar una noción que antes teníamos para conjuntos ahora para clases en general.

**Definición<sub>4</sub>.** Diremos que la relacional  $R$  *Bien Funda* a la clase  $A$  o que la clase  $A$  *está Bien Fundada por  $R$*  si y sólo si todo subconjunto no-vacío de  $A$  tiene un elemento  $R$ -minimal:

$$\forall x \subseteq A \left[ x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \neg \exists z (z \in x \ \& \ zRy) \right]$$

En el caso en que  $A = \text{CAMP}(R)$  simplemente se dirá que  $R$  *está Bien Fundada*.

**Observación.** Son equivalentes las siguientes afirmaciones.

- i)  $R$  bien funda a  $A$
- ii)  $\forall x \subseteq A \left[ x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \left( z \in x \rightarrow \neg(zRy) \right) \right]$
- iii)  $\forall x \subseteq A \left[ x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \left( zRy \rightarrow z \notin x \right) \right]$
- iv)  $\forall x \subseteq A \left[ x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \left( y_R \cap x = \emptyset \right) \right]$

**OJO:** El axioma de buena fundación (**ABF**) es equivalente a que la relacional  $\in$  bien funde al universo,  $V$ .

**Proposición<sub>5</sub>.** Si  $R$  bien funda a  $A$ , entonces

- i)  $R$  es irreflexiva en  $A$ , e.d.  $\forall w \in A \neg(wRw)$  o  $\neg \exists w \in A (wRw)$
- ii)  $R$  es asimétrica en  $A$ , e.d.  $\forall x, y \in A \left[ xRy \rightarrow \neg(yRx) \right]$  o  $\neg \exists x, y \in A \left[ xRy \ \& \ yRx \right]$
- iii) No hay una sucesión finita de elementos de  $A$ , digamos  $\langle a_0, a_1, \dots, a_{n+1} \rangle$ , tales que  $a_1Ra_0, a_2Ra_1, \dots, a_{n+1}Ra_n, a_0Ra_{n+1}$

**Prueba: (EJERCICIO).**

†

**Proposición<sub>6</sub>.**

- a. Si  $R$  bien funda a  $A$ , entonces **no** hay una sucesión infinita  $\langle a_i \rangle_{i \in \omega}$ , de elementos de  $A$ , tal que

$$\forall i \in \omega \left[ a_{i+1} r a_i \right]$$

- b. La conversa de la anterior es cierta bajo la suposición del **AED**.

**Prueba: TAREA.**

†