Principio de Minimalidad para Relacionales Bien Fundadas

En lo que sigue, sean A una clase y R una relacional con $CMP(R) \subseteq A$.

Si R es una relacional bien fundada e izquierda limitada sobre A, entonces toda subclase no vacía de A, tiene un elemento R–minimal, e.d.

$$\emptyset \neq B \subseteq A \rightarrow \exists y \in B\ \forall z \in B\big(\neg\, zRy\big)$$

o equivalentemente, si $\Psi(x)$ es una fórmula conjuntista, entonces

$$\exists x \in A\, \Psi(x) \rightarrow \exists y \in A\Big[\Psi(y)\ \ \&\ \ \forall z\Big(zRy\ \rightarrow\ \neg\, \Psi(z)\Big)\Big]$$

Prueba:

Supongamos $x_0 \in A$ con la propiedad $\Psi(x_0)$.
Si $\forall z\big(zRx_0 \rightarrow \neg\, \Psi(z)\big)$, no hay nada que probar, x_0 es el buscado. Supongamos pues, que

$$\exists z\Big[zRx_0\ \ \&\ \ \Psi(z)\Big] \tag{$*$}$$

Consideremos a $a = CT_R(\{x_0\})$ (R es izquierda limitada sobre A) y sea

$$b = \Big\{z \in a\ \ /\ \ \Psi(z)\Big\}$$

tenemos que $\emptyset \neq b \subseteq A$ (pues $x_0 \in b$). Así, hay un elemento, y_0, R–minimal en b. Es decir:

(1) $y_0 \in b$ y

(2) $\forall z\Big(zRy_0\ \rightarrow\ z \notin b\Big)$

Veamos que y_0 es el conjunto buscado. En efecto,

(i) Por (1) tenemos que, $y_0 \in a \subseteq CMP(R) \subseteq A$ y $\Psi(y_0)$. Y

(ii) $\forall z\Big(zRy_0\ \rightarrow\ \neg\Psi(z)\Big)$: Pues supongamos que zRy_0. Por (2), tenemos que $z \notin b$ y, debido a la definición de b, tenemos que o $z \notin a$ o $\neg\Psi(z)$. Pero ya que como $y_0 \in a$, como a es R–transitivo y zRy_0 tenemos que $z \in a$. Concluimos que, $\neg\Psi(z)$. †

Principio de Inducción para Relacionales Bien Fundadas

Sean R una relacional bien fundada e izquierda limitada sobre A y $\chi(x)$ una fórmula conjuntista, entonces

$$\forall y \in A\left[\forall z\Big(zRy \;\to\; \chi(z)\Big) \;\to\; \chi(y)\right] \to \forall x \in A\, \chi(x)$$

Prueba: En el PM/RBF tomar $\Psi(x) \leftrightharpoons \neg\chi(x)$ y posteriormente la contrapositiva. †

Algunos comentarios:

La Relacional $\in$ es izquierda limitada.

$$a_{\in} = \Big\{x \;/\; x \in a \;\&\; x \neq a\Big\} \subseteq a \in V$$

Ahora bien, puesto que el **A**xioma de **B**uena **F**undación (**ABF**) no es mas que una reformulación de la afirmación, la $\in$ bien funda a V, tenemos que bajo esta suposición, es cierto el siguiente principio,

Sea ψ una fórmula conjuntista. Así

$$\forall x\left[\forall y\Big(\, y \in x \;\to\; \psi(y)\,\Big) \;\to\; \psi(x)\right] \to \forall x\, \psi(x)$$

Todos los conjuntos tienen una propiedad, siempre que uno arbitrario la tenga, bajo la suposición de que todos sus elementos la tengan.

Al cual bien podríamos llamar $\in$–**Inducción**.

También, bajo la suposición del **ABF**, tenemos lo correspondiente al principio de mimimalidad,

$$\exists x\, \Psi(x) \to \exists y\Big[\Psi(y) \;\&\; \forall z\Big(z \in y \;\to\; \neg\, \Psi(z)\Big)\Big]$$

El cual es una forma fuerte de dicho axioma.

En el caso de no tener a la mano el **ABF**, lo que se puede rescatar es lo siguiente. Se puede probar que la clase

$$BF = \Big\{x \;/\; x \text{ está bien fundado por } \in\Big\}$$

está bien fundado por $\in$ y por tanto tiene un principio de minimalidad y uno de inducción.

†