Aritmética Ordinal

Algunas aplicaciones del **E**squema **G**eneral de **R**ecusión para los **OR**dinales en su segunda forma, son, por ejemplo, las que nos permiten definir las operaciones básicas de la aritmética ordinal.

$+)$ Sea α un ordinal cualquiera, definimos recursivamente sobre todos los ordinales, la tabla de sumar (por la izquierda) con α, denotado por Σ_α, como sigue:

$$\Sigma_\alpha : OR \to OR$$

I. $\Sigma_\alpha(0) = \alpha$

II. $\forall\beta,\ \Sigma_\alpha(\beta^+) = (\Sigma_\alpha(\beta))^+$

III. $\forall\beta \in LIM,\ \Sigma_\alpha(\beta) = \bigcup\left\{\Sigma_\alpha(\gamma)\ /\ \gamma < \beta\right\}$

Para ver que está bien definida Σ_α, basta ver que se cumplen las hipótesis del **ER**/**OR**. En este caso tomamos como $a = \alpha$, como H la funcional sucesor $(\_^+)$ y como $J = \bigcup$.

Ahora, podemos definir la suma entre ordinales como sigue:

$$+ \ : OR \times OR \to OR$$

$$\forall\alpha,\beta, \quad +(\alpha,\beta) = \Sigma_\alpha(\beta)$$

Como siempre, $\alpha + \beta \leftrightharpoons +(\alpha,\beta)$.

Así, si $\alpha,\beta \in OR$ y $\gamma \in LIM$, entonces:

i). $\alpha + 0 = \alpha$

ii). $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$

iii). $\alpha + \gamma = \bigcup\left\{\alpha + \xi\ /\ \xi \in \gamma\right\}$

Algunos casos interesantes son:

1. $\alpha + 0 = \alpha$ (por definición) y $0 + \alpha = \alpha$ (por el **PI**/**OR** 2a. forma)
El cero es el neutro aditivo.

2. La suma entre ordinales restrigida a $\omega \times \omega$, coincide con la suma entre naturales.

3. $\alpha + 1 = \alpha + 0^+ = (\alpha + 0)^+ = \alpha^+$, para toda α. Pero
$1 + \omega = \bigcup\left\{1 + n\ /\ n \in \omega\right\} = \omega$.
La suma ordinal, *NO es conmutativa.*

4. $1 + \omega = 2 + \omega$.
La ley de cancelación para la suma por la derecha, *NO es cierta.*

5. $\omega + \omega = \bigcup\left\{\omega + n \ / \ n \in \omega\right\} > \omega$. Así, $\omega + \omega$ es el 2o. ordinal límite (**TAREA**).

6. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
La suma ordinal es asociativa.

•) Sea α un ordinal cualquiera, definimos recursivamente sobre todos los ordinales, la tabla de multiplicar (por la izquierda) por α, denotado por Π_α, como sigue:

$$\Pi_\alpha : OR \to OR$$

I. $\Pi_\alpha(0) = 0$

II. $\forall\beta,\ \Pi_\alpha(\beta^+) = \Pi_\alpha(\beta) + \alpha$

III. $\forall\beta \in LIM,\ \Pi_\alpha(\beta) = \bigcup\left\{\Pi_\alpha(\gamma) \ / \ \gamma < \beta\right\}$

Para ver que está bien definida Π_α, basta ver que se cumplen las hipótesis del **ER**/**OR**. En este caso tomamos como $a = 0$, como H la funcional sumar α por la derecha, es decir $H(x) = x + \alpha$ y como $J = \bigcup$.

Ahora, podemos definir el producto, entre ordinales, como sigue:

$$\cdot \ : OR \times OR \to OR$$

$$\forall\alpha,\beta, \quad \cdot(\alpha,\beta) = \Pi_\alpha(\beta)$$

Como siempre, $\alpha \cdot \beta \leftrightharpoons \cdot(\alpha,\beta)$.

Así, si $\alpha,\beta \in OR$ y $\gamma \in LIM$, entonces:

i). $\alpha \cdot 0 = 0$

ii). $\alpha \cdot \beta^+ = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$

iii). $\alpha \cdot \gamma = \bigcup\left\{\alpha \cdot \xi \ / \ \xi \in \gamma\right\}$

Algunos casos interesantes son:

1. $\alpha \cdot 0 = 0$ (por **i**) y $0 \cdot \alpha = 0$ –por **PI**/**OR** 2a. forma–

2. $\alpha \cdot 1 = \alpha \cdot 0^+ = \alpha \cdot 0 + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$ y
$1 \cdot \alpha = \alpha$ –por el **PI**/**OR** 2a. forma–
El 1 es el neutro multiplicativo.

3. El producto entre ordinales restrigida a $\omega \times \omega$, coincide con el producto entre naturales.

4. $\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1^+ = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega$.
Pero, $2 \cdot \omega = \bigcup \left\{ 2 \cdot n \ / \ n \in \omega \right\} = \omega$.
El producto entre ordinales, *NO conmuta.*

5. $2 \cdot \omega = 3 \cdot \omega$.
No vale la *ley de cancelación por la derecha* para el producto.

6. $\omega \cdot \omega = \bigcup \left\{ \omega \cdot n \ / \ n \in \omega \right\} > \omega$.

7. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ (El producto es asociativo).

8. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$ (El producto distribuye a la suma).

$exp)$ Sea α un ordinal cualquiera, definimos recursivamente sobre todos los ordinales, la exponenciación con base α, denotado por E_α, como sigue:

$$E_\alpha : OR \to OR$$

I. $E_\alpha(0) = 1$

II. $\forall \beta,\ E_\alpha(\beta^+) = E_\alpha(\beta) \cdot \alpha$

III. $\forall \beta \in LIM,\ E_\alpha(\beta) = \bigcup \left\{ E_\alpha(\gamma) \ / \ \gamma < \beta \right\}$

Para ver que está bien definida E_α, basta ver que se cumplen las hipótesis del **ER**/**OR**. En este caso tomamos como $a = 1$, como H la funcional multiplicar por α, por la derecha y como $J = \bigcup$.

Ahora, podemos definir la exponenciación, entre ordinales, como sigue: Sea

$$exp : OR \times OR \to OR$$

$$exp(\alpha, \beta) = E_\alpha(\beta)$$

Como siempre, $\alpha^\beta \leftrightharpoons exp(\alpha, \beta)$.

Así, si $\alpha, \beta \in OR$ y $\gamma \in LIM$, entonces:

i). $\alpha^0 = 1$

ii). $\alpha^{\beta^+} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha$

iii). $\alpha^\gamma = \bigcup \left\{ \alpha^\xi \ / \ \xi \in \gamma \right\}$

Algunos casos interesantes son:

1. La exponenciación entre ordinales restrigida a $\omega \times \omega$, coincide con la exponenciación entre naturales.

2.

a. $0^0 = 1$ y
para $n \in \omega \setminus \{0\}$, se tiene $0^n = 0$.

b. $0^\omega = \bigcup\left\{0^n \ / \ n \in \omega\right\} = 1$

c. $0^{\beta^+} = 0$, para cualquier β.

d. Para $\gamma \in LIM$, se tiene $0^\gamma = 1$.

3. $\alpha^1 = \alpha^{0^+} = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$ y
$1^\alpha = 1$ –usando el **PI**/**OR** 2a. forma.

4. $\omega^2 = \omega^1 \cdot \omega = \omega \cdot \omega$ y
$\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega = (\omega \cdot \omega) \cdot \omega = \omega \cdot \omega \cdot \omega$

5. $2^\omega = \bigcup\left\{2^n \ / \ n \in \omega\right\} = \omega$ y
$n^\omega = \omega$ para $n \in \omega \setminus \{0\}$.

6. $\omega^\omega = \bigcup\left\{\omega^n \ / \ n \in \omega\right\}$.

7. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

8. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.