Cardinalidad y Cardinales

Introducción.

Hasta ahora hemos trabajado en **ZF**$^-$ y aquí, como sabemos, la Teoría de la Comparación es incompleta. Recordemos.

La dominancia, $\precsim$, sobre V, es reflexiva, transitiva y aunque es **no**-antisimétrica, cumple con el Teorema de Cantor–Schöeder-Bernstein. Y la dominancia estricta, $\prec$, es irreflexiva, asimétrica y transitiva (establece un orden parcial) sobre V. Si queremos tener una buena teoría de la comparación, deberíamos tener que cualesquiera dos conjuntos son comparables en tamaño, en símbolos: Si a y b son conjuntos arbitrarios, entonces

1. $a \precsim b$ o $b \precsim a$ (dicotomía de $\precsim$) o equivalentemente,

2. $a \prec b$ o $a \sim b$ o $b \prec a$ (tricotomía de $\prec$, módulo la relacional de equipotencia).

Lo que se sabe es que esto último depende del Axioma de Elección (**AE**), de hecho son equivalentes. Veamos esto.

Definición:

1. Un conjunto a es *Bien Ordenable* syss hay una relación que lo bien ordena. En símbolos:

$$a \text{ es } \textit{Bien Ordenable} \text{ syss } \exists\, r \left[r \subseteq a \times a \ \ \& \ \ \langle a, r \rangle \in COBO \right]$$

2. $BO = \left\{ x \ / \ x \text{ es bien ordenable} \right\}$.

Lo que nos dice el **T**eorema de **B**uena **O**rdenación (**TBO**) es que “Todo conjunto es bien ordenable”. En símbolos,

$$\textbf{TBO} \ \leftrightharpoons \ V = BO$$

Sabemos que éste y el Axioma de Elección (**AE**), son equivalentes. En símbolos,

$$\textbf{ZF}^- \vdash \textbf{AE} \leftrightarrow V = BO$$

Ahora bien, ayudandonos del Teorema de enumeración y la “técnica de copiado” tenemos,

$$\textbf{ZF}^- \vdash V = BO \leftrightarrow \forall x\, \exists \alpha \left[\alpha \sim x \right]$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{ZF}^{-} \vdash \forall x \left[x \in BO \leftrightarrow \exists \alpha \left(\alpha \sim x \right) \right]$$

Tampoco es difícil ver que:

$$\mathbf{ZF}^{-} \vdash \forall x \, \exists \alpha \left[\alpha \sim x \right] \rightarrow \forall x,y \left[x \precsim y \vee y \precsim x \right]$$

Y de lo anterior, se desprende que

$$\mathbf{ZF}^{-} \vdash V = BO \rightarrow \forall x,y \left[x \precsim y \vee y \precsim x \right]$$

Para darle una mejor lectura, reescribimos lo anterior de la siguiente manera,

$$\mathbf{ZF}^{-} \vdash \forall x,y \left[x,y \in BO \rightarrow x \precsim y \vee y \precsim x \right]$$

Así, entre conjuntos bien ordenables tenemos una buena Teoría de la Comparación, es ¡completa!

Pero ¿qué ocurre si hubiera conjuntos los cuales no fueran bien ordenables?

Resulta que ¡habría incomparables! Y esto lo garantiza la siguiente,

Proposición. (**HARTOG**, **1915**). Si hay conjuntos no-bien ordenables, entonces hay conjuntos incomparables. De hecho,

Si a es no–bien ordenable, hay un ordinal α tal que ni $\alpha \precsim a$ ni $a \precsim \alpha$.

Prueba: Supongamos pues, que $a \notin BO$.

De lo que vimos anteriormente tenemos, $\neg \exists \gamma \, [a \precsim \gamma]$, es decir, $\forall \gamma \, [a \not\precsim \gamma]$. Basta pues, encontrar un α tal, que $\alpha \not\precsim a$. Sea

$$B_a = \left\{ \beta \;/\; \exists u,v \left[u \subseteq a \;\&\; v \subseteq u \times u \;\&\; \left\langle u, v \right\rangle \in COBO \;\&\; \tau\left(u, v\right) = \beta \right] \right\}$$

Af$_1$. $B_a \in V$.

La prueba se deja al lector (**Tarea**).

Puesto que B_α es un conjunto de ordinales, tenemos que éste está acotado superiormente, sea pues α cualquier cota superior, estricta, de B_α. P.E., $\alpha = \left(\bigcup B_\alpha \right)^{+}$.

Af$_2$. $\alpha \not\precsim a$.

Pues en caso contrario, habría una f tal, que $\alpha \precsim_f a$, pero entonces $\alpha \sim_f f[\alpha] \subseteq a$ y por tanto $\alpha \in B_a$ $\underset{\circ}{\nabla}$!! †

Como el lector se habrá dado cuenta, éste resutado no es más que la contrapositiva de que si hubiera una comparabilidad, entonces todo conjunto sería bien ordenable. Resumimos esto en el siguiente,

Corolario.

1. **ZF**$^-$ $\vdash V = BO \leftrightarrow \forall x,y \left[x \precsim y \vee y \precsim x \right]$.
2. **ZF**$^-$ $\vdash$ **AE** $\leftrightarrow \forall x,y \left[x \precsim y \vee y \precsim x \right]$.

Este resultado nos muestra claramente que si queremos una buena teoría de la comparación, es necesario la suposición del **TBO**, o algo equivalente al **AE**. Nuestra intención será desarrollar la teoría de los números cardinales y su aritmética, hasta el punto de **no** necesitar dichas suposiciones, específicamente empezaremos trabajando sobre los conjuntos bien ordenables.

Por lo pronto analicemos más de cerca la prueba del resultado anterior. Como se ve en dicha prueba, tanto para la construcción de B_a, como para sus propiedades, *no* se necesitó el hecho de que el conjunto a fuera no–bien ordenable. Así pues podemos considerar que a es un conjunto arbitrario. Además, veamos que el mismo B_a es un ordinal y que además, nos sirve para dicha prueba.

Sea a un conjunto arbitrario, $a \in V$, y consideremos el conjunto B_a, definido como antes. Así:

1. B_a es un *conjunto* de ordinales.
2. $B_a = \left\{ \beta \ / \ \beta \precsim a \right\}$.

   $\subseteq \big]$ Si $\gamma \in B_a$, entonces hay un $b \subseteq a$ y $r \subseteq b \times b$ tales, que $\left\langle b, r \right\rangle \in COBO$ y $\tau\left(b, r\right) = \gamma$. Por tanto hay una función f tal que $\langle \gamma, \in \rangle \simeq_f \langle b, r \rangle$. Concretando: $\gamma \sim_f b \subseteq a$. Por tanto, $\gamma \precsim a$.

   $\supseteq \big]$ Si $\beta \precsim a$, hay una función g tal que $\beta \precsim_g a$, pero entonces $\beta \sim_g g[\beta] \subseteq a$ y al calcar el orden de β a $g[\beta]$ concluimos que $\beta \in B_a$.
3. B_a es transitivo.
   Es una consecuencia de **2**. y de que $\in \ = \ \subsetneq$.
4. $B_a \in OR$.
5. $B_a \not\precsim a$.
   Pues en caso contrario, por **2**. tendríamos que el ordinal $B_a \in B_a$ $\underset{\circ}{\nabla}$!!

   (Teniendo así, a otro testigo para el ordinal buscado en la prueba anterior).

6. $\forall\beta\left[\ \beta < B_a \ \rightarrow \ \beta \nsim B_a\ \right]$.

Si $\beta \in B_a$, por **2**., $\beta \precsim a$ y sería imposible que $\beta \sim B_a$, pues si fuera el caso, se tendría que $B_a \precsim a \underset{\circ}{\nabla}$!!!

7. $\forall\beta\left[\ \beta < B_a \ \rightarrow \ \beta \prec B_a\ \right]$.

Al ser $\beta < B_a$, también se tiene que, $\beta \subsetneq B_a$ y por tanto $\beta \precsim B_a$. Ahora el resultado se sigue inmediatamente del anterior.

8. $\forall\gamma\left[\ B_a \leq \gamma \ \rightarrow \ \gamma \not\precsim a\ \right]$.

La contrapositiva, es inmediata de **2**.

9. $\forall\gamma\left[\ B_a \leq \gamma \ \rightarrow \ B_a \precsim \gamma\ \right]$.

10. $B_0 = 1$ y $B_{28} = 29$.

11. $B_\omega = \left\{\beta \ / \ \beta \precsim \omega\right\} = \left\{\beta \ / \ \beta \prec \omega\right\} \cup \left\{\beta \ / \ \beta \sim \omega\right\} = \omega \cup \left\{\beta \ / \ \beta \sim \omega\right\}$.

Así, B_ω es el conjunto de todos los ordinales contables, los finitos y los numerables. Es un ordinal posterior (en el orden de los ordinales) que ω, $\omega < B_\omega$ y en lo que respecta al tamaño, éste es mayor que ω, $\omega \prec B_\omega$. Además, si γ es un ordinal tal que $B_\omega \leq \gamma$, se tiene que $\omega \prec B_\omega \precsim \gamma$ y por tanto, $\omega \prec \gamma$. Concluyendo que B_ω es el primer ordinal incontable. Más adelante le llamaremos a B_ω, con el nombre de ω_1.

12. $\omega \prec B_\omega \prec B_{B_\omega}$.