Álgebra de Conjuntos I

Gabriel Cachoa Ocampo

Marzo, 2016

Recordar:
Si a es un conjunto, R es una relación sobre a si y sólo si $R \subseteq a \times a$. Si x, y son elementos de a, entonces escribimos: xRy si y sólo si $< x, y > \in R$.

1 Definiciones Básicas

(Sobre relaciones) Sea x un conjunto, sea R relación sobre x:

1. R es **reflexiva** si y sólo si $\forall a \in x(aRa)$
2. R es **irreflexiva** si y sólo si $\forall a \in x \neg(aRa)$
3. R es **simétrica** si y sólo si $\forall a, b \in x(aRb \to bRa)$
4. R es **asimétrica** si y sólo si $\forall a, b \in x(aRb \to \neg(bRa)$
5. R es **antisimétrica** si y sólo si $\forall a, b \in x(aRb\&bRa \to a = b)$
6. R es **transitiva** si y sólo si $\forall a, b, c \in x((aRb\&bRc) \to aRc)$
7. R es **intransitiva** si y sólo si $\forall a, b, c \in x((aRb\&bRc) \to \neg aRc)$
8. R es **dicotómica** si y sólo si $\forall a, b \in x(aRb \vee bRa)$
9. R es **tricotómica** si y sólo si $\forall a, b \in x(aRb \vee bRa \vee a = b)$

(**Sobre Relaciones de Equivalencia y Particiones**) Sea x un conjunto, sea R relación sobre x:

1. Diremos que R es de equivalencia si y sólo si es reflexiva transitiva y simétrica.
2. Si R es de equivalencia diremos que $[a]_R := \{b \in R | aRb\}$ es la clase de equivalencia de a módulo R.
3. Si R es de equivalencia, diremos que el conjunto: $x_{/R} := \{[a]_R | a \in x\}$ es el cociente de x módulo R.

4. Si R es de equivalencia, diremos que $c \subseteq x$ es un conjutno de representantes para las clases de equivalencia de x módulo R si y sólo si: $\forall y \in x_{/R} \exists z \in c(x \cap y = \{z\})$

5. Diremos que p es una partición de x si se cumplen: (1) $\forall a, b \in p(a \cap b = \emptyset)$ (2) $\bigcup p = x$.
   Es un resultado clásico de este tema ver que una relación de equivalencia induce una partición, y que toda partición induce una relación de equivalencia.

(**Sobre Órdenes Parciales**) Sea x un conjunto, sea R una relación sobre x:

1. Diremos que R es un **preorden** (preordena a x) si y sólo si es transitiva y antisimétrica. Denotaremos por PRE a la clase de todos los preórdenes. PRE:=$\{< x, R > |$R preordena a x$\}$

2. Diremos que R es un **orden parcial reflexivo** (ordena parcialmente en un sentido reflexivo a x) si y sólo si R reflexiva, transitiva y antisimétrica. Usualmente usaremos: "$\leq$" para hablar de órdenes parciales reflexivos.

3. Diremos que R es un **orden parcial estricto** (ordena parcialmente en un sentido estricto a x) si y sólo si es transitiva y asimétrica. Usualmente usaremos "$<'$" para hablar de órdenes estrictos.
   Es claro que dado un órden (reflexivo o estricto) se puede definir un nuevo orden que preserve las mismas relaciones de órden pero que sea reflexivo o estricto.

4. Denotaremos por COPO a la clase de todos los órdenes parciales. COPO:=$\{< x, R > |$R ordena parcialmente a x$\}$.

(**Operadores sobre Órdenes**) Sea $< x, \leq > \in COPO$, $a \in x$.

1. a es <u>el</u> elemento $\leq$-máximo de x si y sólo si $\forall b \in x(b \leq a)$ (lo denotamos: $b = min_{\leq} x$). También decimos que b es el extremo derecho de x.

2. a es <u>un</u> elemento $\leq$-maximal de x si y sólo si $\neg(\exists b \in x(a \leq b \& a \neq b))$

3. a es <u>eñ</u> elemento $\leq$-mínimo de x si y sólo si $\forall b \in x(a \leq b)$ (lo denotamos: $b = max_{\leq} x$). También decimos que b es el extremo izquierdo de x.

4. a es <u>un</u> elemento $\leq$-minimal de x si y sólo si $\neg(\exists b \in x(a \leq b \& a \neq b))$

5. a es <u>una</u> $\leq$-cota superior (inferior) de $A \subseteq x$ si y sólo si $\forall b \in A(b \leq a)$ $(\forall b \in A(a \leq b))$

6. Sea $A \subseteq x$, a es <u>el</u> $\leq$-supremo de A si y sólo si es la $\leq$-mínima $\leq$-cota inferior.

7. Sea $A \subseteq x$, a es <u>el</u> $\leq$-ínfimo de A si y sólo si es la $\leq$-máxima $\leq$-cota superior.

8. Diremos que dos elementos a,b $\in x$ son $\leq$-comparables ($a \parallel b$) si y sólo si $a \leq b \vee b \leq a$. En otro caso diremos que son $\leq$-incomparables ($a \perp b$). Un subconjutno $A \subseteq x$ diremos que es una $\leq$-cadena si y sólo si $\forall a, b \in A(a \parallel b)$. Diremos que es una $\leq$-anticadena si y sólo si $\forall a, b \in A(a \perp b)$.

9. Dados dos elementos de x, $a, b \in x$ tal que $a \leq b$, definimos a los intervalos como:
$[a, b] := \{c \in x | a \leq c \leq b\}$
$(a, b) := \{c \in x | a < c < b\}$
$[a, b) := \{c \in x | a \leq c < b\}$
$(a, b] := \{c \in x | a < c \leq b\}$

(**Distintas Clases de Conjuntos Ordenados**) Sea x un conjunto y R una relación sobre x.

1. Diremos que $< x, R >$ es un COTRI si y sólo si R es tricotómica (conjunto tricotómico).

2. Diremos que $< x, R >$ es un COTO si y sólo si es un orden parcial tricotómico, $< x, R > \in COPO \bigcap COTRI$, (conjunto totalmente o linealmente ordenado).

3. Diremos que $< x, R >$ es un COBO si y sólo si $< x, R > \in COPO$ y para todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo.

4. Diremos que $< x, R >$ es un COIF si y sólo si para todo subconjunto,$a \subseteq x$, y para todo elemento, $y \in x$, el hecho de que todos los elementos de$x$ que estén $\leq$-relacionados con y estén en a Timplica que $y \in x$. En símbolos $\forall z \in x(xRy \to x \in a) \Rightarrow y \in a$. (Conjunto con Inducción Fuerte)

5. Diremos que $< x, R >$ es un COBF si y sólo si todo subconjunto no vacío tiene un R-minimal. (Conjunto Bien Fundado)

Ej. 1.1. *Escribir estas últimas definiciones en un lenguaje de primer orden usando como símbolos no lógicos: $\in, R, \subseteq$.*

2 Vistazo a la Teoría de Órdenes

Vamos a probar las relaciones que poseen con respecto a la contención las clases de órdenes que hemos definido anteriormente. Éstas se pueden visualizar en el siguiente diagrama que extraemos del libro del Dr. José Alfredo Amor Montaño,"Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias". Probémos que las implicaciones en este diagrama son verdaderas y que las recíprocas son todas falsas.

Prop. 2.1. *COBO implica COTO, el recíproco es falso.*

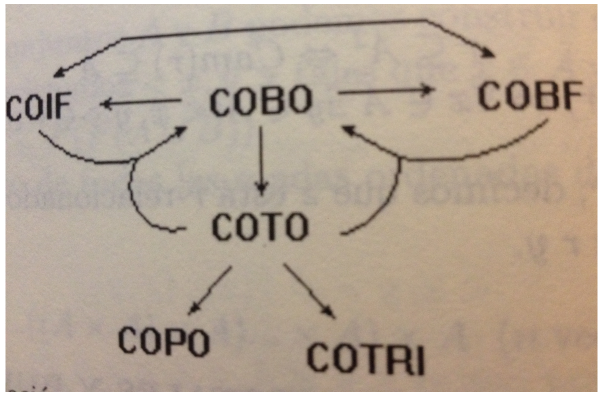

Figure 1: Diagrama de Contenciones

Pba. Sea $< x, R >$ un buen orden, por hipótesis es un orden parcial. Basta probar que es un conjunto tricotómico. Sean, $a, b \in x$, como es un buen orden $\exists c \in x(c = min_R\{a, b\})$, por ser un R-mínimo $c \in \{a, b\}$, hay dos casos, por ejemplo si $a = c$ tenemos que $a = c \leq b$, análogamente si $c = b$, entonces $b \leq a$. Un ejemplo de un conjunto bien ordenado que no está linealmente ordenado es $< \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} >$, pues es un orden lineal en el que el subconjunto $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ no tiene mínimo. †

Prop. 2.2. *COTO implica COPO, y COTRI, los recíprocos son falsos.*

Pba. La prueba es trivial pues se siguen de la definición de conjunto totalmente ordenado.
Un conjunto parcialmente ordenado, no totalmente ordenado es $< \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq >$, es un orden parcial por la refelxividad, transitvidad y antisimetría de la conención, pero no es un orden lineal dado que no es tricotómico. Por ejemplo los conjuntos $\{1\}, y\{2\}$ son $\subseteq -incomparables$, es decir no se cumple $\{1\} \subseteq \{2\}$ ni $\{2\} \subseteq \{1\}$. En $\mathbb{R}^2$ definamos la relación $<<\subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ como $(x_1, x_2) << (y_1, y_2) \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq_{\mathbb{R}} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Se deja como ejercicio verificar que $< \mathbb{R}, << >$ es un conjunto tricotómico, pero no es un orden lineal, pues no es antisimétrica la relación. †

Prop. 2.3. *Todo COBO es COBF, el recíproco es falso.*

Pba. Claramente todo COBO es COBF, si todo conjutno tiene un R-mínimo, entonces tiene un R-minimal, porque todo mínimo es minimal.
Por ejemplo $< \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq >$, no es un buen orden, pues no es un orden lineal, pero sí es un conjunto bien fundado pues todo subconjutno tiene un $\subseteq -minimal$. Si tomamos $a \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces $\bigcap a$ es un $\subseteq -minimal$ de a. Un ejercicio es buscar un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que no tenga $\subseteq -minimo$. †