Lenguaje Formal para la Teoría de Conjuntos

Gabriel Cachoa Ocampo

Febrero 2016

En este apartado lo que buscamos es desarrollar un lenguaje adecuado para el discurso que corresponde a la formalización de la teoría de conjuntos a partir de una teoría intuitiva.A este lenguaje le llamaremos **lenguaje objeto** mientras que al lenguaje usual, a saber el español, le llamaremos el **metalenguaje**.La teoría intuitiva de conjuntos la entendemos y escribimos en el metalenguaje. Dentro de un discurso lógico formal no se pueden definir todos los conceptos dentro del mismo discurso, dado que esto llevaría a definiciones por circularidad, o una sucesión infinita de definiciones.
A los elementos del discurso que no se definen les llamamos **nociones primitivas**, nosotros tendremos dos: La primera, "conjunto", pues es el objeto mismo a discutir en el discurso. En este sentido, la teoría de conjuntos, formalizada, no trata de definir lo que es un conjunto, esto se entiende intuitivamente y se discute en el metalenguaje. La segunda, "la pertenencia", también se entiende intuitivamente y se discute en el metalenguaje. La teoría de conjuntos no responde qué es un conjunto, por ejemploAkiro Kanamori considera que preguntas de este tipo no son de corte matemático. Lo que buscamos es hablar de propiedades de conjuntos, enunciados sobre conjuntos. Por ejemplo, metalingüísticamente: "Basta que dos conjuntos tengan los mismos elementos para que sean iguales.", "Existe al menos un conjunto sin elementos.","Los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos.", etc.
Dado que queremos un lenguaje objeto para escribir propiedades de conjuntos, propiedades de individuos del discurso, nuestro lenguaje objeto será uno de primer orden, con un único símbolo no lógico, el que simboliza a la pertenencia. Es através de este lenguaje que escribiremos nuestros axiomas y nuestros teoremas, y caracterizaremos la deducción de teoremas.
Dentro de la teoría, los conceptos de conjunto y de pertenencia quedan establecidos al determinar cómo construimos a los conjuntos, este problema es el que aborda El Profesor al presentar la jerarquía acumulativa, la idea intuitiva sobre la cual se fundamentan nuestro axiomas.

1 Un lenguaje formal para la teoría de conjuntos

Una expresión es una sucesión finita de símbolos del alfabeto. Por ejemplo, "Me llamo Gabriel" es la sucesión finita: $0 \to M, 1 \to e, ..., 14 \to e, 15 \to l$, lo leemos de corrido porque sabemos que el orden de las letras está dado de izquierda a derecha consecutivamente. Formalmente:

D̲ef. 1.0. *Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto de símbolos. Diremos que una sucesión finita de símbolos de S forma una* **Expresión de S**, *denotaremos $\mathbb{E}_S$ al conjunto de expresiones de S.*

Ahora que podemos escribir expresiones, es necesario reconocer que no todas están gramaticalmente bien escritas, por ejemplo: "Ahbef swgj dgn." Para nosotros, un lenguaje formal es aquel alfabeto acompañado de sus expresiones bien escritas. Podemos pensar en las reglas de formación como las reglas gramaticales del lenguaje. Formalmente:

D̲ef. 1.1. *Sean S un conjunto de símbolos, y $\phi \subseteq \mathbb{E}_S$ un subconjunto de expresiones de S, no vacíos. Por* **Lenguaje Formal** *(L.F.), L, entenderemos a la pareja $L =< S, \phi >$. Diremos que S es el alfabeto de L y ϕ el conjunto de fórmulas bien formadas (f.b.f.). Por lo general, se tiene una serie de reglas, llamadas* **Reglas de Formación** *de L que proporcionan un mecanismo para decidir si una expresión dada pertenece o no a ϕ.*

El lenguaje de la teoría de conjuntos lo denotamos $L_\epsilon =< S_\epsilon, \phi_\epsilon >$. Primero, demos explícitamente cuáles serán los símbolos de nuestro lenguaje.

D̲ef. 1.2. *El conjunto de símblos S_ϵ está dado por la unión de los siguientes conjuntos:*

1. *Un conjunto de variables, que nosotros simbolizaremos con letras minúsculas con, eventualmente, subíndices y supraíndices. Son necesarias y suficientes tantas variables como números naturales. (¿Por qué?)* $\{a, b, c, ..., x, y, z, ..., a_n, ..., z_n, ..., a^n, ..., z^n, ...\}$

2. *Un conjunto de conectivos lógicos.* $\{\neg, \rightarrow, \&, \vee, \leftrightarrow\}$

3. *Un conjunto de cuantificadores.* $\{\forall, \exists\}$

4. *Un conjunto de símbolos de puntuación.* $\{), (, \}, \{, ,'\}$

5. *Un conjunto con símbolo de igualdad.* $\{=\}$

6. *Un conjunto con una única letra relacional de aridad dos (es decir que relaciona a dos individuos del discurso), que simbolizaremos con la letra griega épsilon mecanográfica:* $\{\in\}$

7. *Un conjunto vacío de letras funcionales y letras constantes.*

Demos las reglas de formación, para facilitar su comprensión no las escribiremos con el grado de generalidad que generalmente se les asocia. Más adelante, cuando tengamos más símbolos no lógicos en el lenguaje volveremos a especificar cómo son las reglas de formación. Por ahora,

Def. 1.3. *El conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje de la teoría de conjuntos $\mathcal{L}_\in$ se obtiene por las siguientes reglas de formación:*

1. *Llamamos* **atómicas** *a todas las expresiones de la forma $x \in y$, donde x, y son conjuntos.*

2. *Todas las atómicas son fórmulas bien formadas.*

3. *Si α, β son fórmulas bien formadas, entonces también lo son: $\neg\alpha, \alpha \& \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \leftrightarrow \beta$ y si x es una variable: $\forall x\alpha$, $\exists x\alpha$.*

4. *Una expresión es una fórmula bien formada si y sólo si se puede verificar por medio del inciso 3.*

Ahora. demos ejemplos de enunciados metalingüisticos (en español) sobre una teoría intuitiva de conjuntos escritos en un lenguaje formal (es decir, usando los símbolos de la definición anterior).

Ej. 1.1. *Algunos ejemplos de f.b.f. del lenguaje de la teoría de conjuntos son:*

1. El conjunto x es elemento del conjunto y: $x \in y$

2. El conjunto x no es elemento del conjunto y: $\neg(x \in y)$ ó $x \notin y$

3. El conjunto x tiene, al menos, un elemento: $\exists y(y \in x)$

4. El conjunto x es vacío: $\neg(\exists y(y \in x))$ ó $\forall y(y \notin x)$

5. El conjunto x es el unitario del conjunto y: $\forall z(z \in x \leftrightarrow z = y)$

6. El conjunto x es un subconjunto del conjunto y: $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

7. El conjunto x es el conjunto potencia del conjunto y:
   $\forall z(z \in x \leftrightarrow (\forall w(w \in z \rightarrow w \in y)))$

8. El conjunto x es el conjunto de todos los conjuntos unitarios de elementos del conjunto y: $\forall z(z \in x \leftrightarrow \exists w(w \in y \& (\forall u(u \in z \leftrightarrow u = y))))$

9. El conjunto x es el conjunto de todos los elementos, de todos los elementos del conjunto y (x es la unión de y): $\forall z(z \in x \leftrightarrow \exists w(w \in y \& z \in w))$

10. El conjunto x es la intersección de los conjuntos a y b: $\forall y(y \in x \leftrightarrow (y \in a \& y \in b))$

11. El conjunto x es la unión de los conjuntos a y b: $\forall y(y \in x \leftrightarrow (y \in a \vee y \in b))$

12. No existen conjuntos que se autopertenezcan: $\forall x(x \notin x)$

13. Basta que dos conjuntos tengan los mismos elementos para que sean iguales $\forall x \forall y \forall z((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

14. No existe un conjunto cuyos elementos sean todos los conjuntos: $\nexists x \forall y(y \in x)$

15. Para todo conjunto, existe un conjunto que lo tenga como elemento $\forall x \exists y(x \in y)$
16. Para todo conjunto, existe un conjunto que lo tenga como subconjunto $\forall x \exists y(\forall z(z \in x \to z \in y))$

No dicen lo mismo las fórmulas:

1. $\forall z(z \notin x)$ "x es un conjunto vacío" (x ocurre libre en la fórmula)
2. $\forall z(z \notin y)$ "y es un conjunto vacío" (y ocurre libre en la fórmula)
   Pero sí dicen lo mismo las fórmulas:
3. $\exists x \forall z(z \notin x)$ (x ocurre acotada en la fórmula)
4. $\exists y \forall z(z \notin y)$ "Existe un conjunto vacío" (y ocurre acotada en la fórmula)

Not. 1.1. *Si α es una f.b.f., tal que la variable x ocurre en α y no está al alcance de un cuantificador en α, entonces escribiremos $\alpha(x)$.*

Ejemplos: $\alpha(x) \leftrightarrow \forall z(z \notin x)$, $\beta(z) \leftrightarrow y \in y$, $\gamma(z) \leftrightarrow \exists y(y \in z)$

Not. 1.2. *Si α es f para denotar que la única variable libre de α es x, si la variable y NO ocurre en α, entonces escribiremos $\alpha(y)$ para denotar la fórmula que se obtiene al intercambiar todas las ocurrencias libres de la variable x por lavariable y.*

Ejemplos: $\alpha(x) \leftrightarrow \forall z(z \notin x)$, entonces: $\alpha(y) \leftrightarrow \forall z(z \notin y)$.
En este sentido, no está bien escribir : $\alpha(z) \leftrightarrow \forall z(z \notin z)$ (¿Por qué?)
Es importante hacer notar que al leer una expresión en nuestro en el lenguaje para la teoría de conjuntos, las variables (a,b,c,...) **SIEMPRE** se interpretan como conjuntos. (Hay otros lenguajes, por ejemplo GNB y MK, en los que sí predican sobre otras estructuras, las clases propias).