Tarea Examen I

Gabriel Cachoa Ocampo

Febrero 29, 2016

Este documento corresponde a la primer tarea examen del curso de Teoría de Conjuntos 1. Se entrega el día 8 de Marzo en el salón y hora de clase (001 del Yelizcalli, de 12:10 a 13:00). La tarea se entrega en parejas, y ambos reciben la misma calificación. SE CALIFICA SOBRE 10 PUNTOS. No hay tolerancia al plagio.

1. **Traducción y lectura de fórmulas bien formadas.** Escriba en el lenguaje formal de la teoría de conjuntos, usando únicamente como símbolo no lógico $\in$, los primeros dos incisos. Interprete el significado de la fórmula del tercer inciso, .

   (a) El conjunto x es el conjunto de todos los unitarios de uniones de elementos del conjunto y. (Es decir, $x = \{\{\bigcup w\} | w \in y\}$) (.35pts)

   (b) El conjunto x es el conjunto de todas las potencias de uniones binarias de elementos del conjunto y. (Es decir, $x = \{\mathcal{P}(a \cup b) | a, b \in y\}$) (.35pts)

   (c) $\neg(\exists a[\forall x(\forall y(y \in x \to y \in a) \to x \in a)])$ (.3pts)

2. **Unicidad de los conjuntos postulados por los axiomas**

   (a) Demuestre que el conjunto postulado por ZF_3 es único.(.2pts)

   (b) Demuestre que el conjunto postulado por ZF_4 es único.(.5pts)

   (c) Demuestre que el conjunto postulado por ZF_5 es único.(.5pts)

   (d) Demuestre que el conjunto postulado por ZF_6 es único.(.8pts)

3. **Conjuntos Transitivos.** Decimos que un conjunto x es transitivo si y sólo si $x \subseteq \mathcal{P}(x)$.

   (a) Demuestre la existencia de al menos tres conjuntos transitivos. (.25pts)

   (b) Demuestre que la unión de un conjunto transitivo, es un conjunto transitivo. (Es decir, si x es transitivo entonces $\bigcup x$ es tansitivo.) (.5pts)

   (c) Demuestre que la potencia de un conjunto transitivo es un conjunto transitivo.(Es decir, si x es un conjunto transitivo entonces $\mathcal{P}(x)$ es transitivo.) (.5pts)

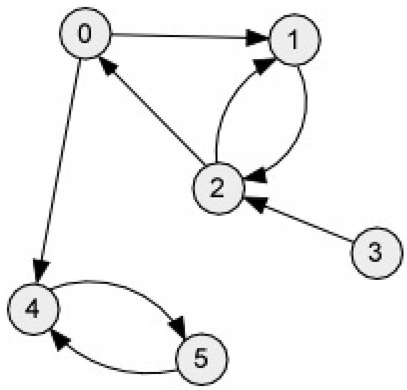

Figure 1: Gráfica G

(d) Argumente informalmente que la jerarquía acumulativa es una estructura transitiva. (.25pts)

4. **Conjuntos Súper Transitivos.** Decimos que un conjunto x es súper transitivo si y sólo si $\mathcal{P}(x) \subseteq x$.

   (a) Demuestre, sin usar axioma de buena fundación, que no existen conjuntos súper transitivos. Sugerencia: Suponga que sí, demuestre que existe un subconjunto como el de la paradoja de Russell, llegue a una contradicción. (.6pts)

   (b) Demuestre, usando el inciso anterior, que no existe el conjunto de todos los conjuntos.(.4pts)
   (Nota: En clase se probó que una consecuencia del ABF es la no existencia del conjunto de todos los conjuntos. A partir de este ejercicio, podemos concluir que no es necesario suponer ABF para llegar a esta conclusión.)

   (c) Demuestre, usando el axioma de buena fundación, que no existen conjuntos súper transitivos. Sugerencia: En clase probamos que una consecuencia del axioma de buena fundación es: $\forall y(y \notin y)$. (.3pts)

   (d) Argumente informalmente que la jerarquía acumulativa es súper transitiva. Sugerencia: Haga un dibujo. (.2pts)

5. **Una Debilitación de los Axiomas.** Suponga ZF_6, demuestre:

   (a) ZF_3 es equivalente a $\forall x \forall y \exists z (x \in z \& y \in z)$ (.5pts)

   (b) ZF_4 es equivalente a $\forall x \exists y [\forall z (\exists w (w \in x \& z \in w)) \rightarrow z \in y]$ (.5pts)

   (c) ZF_5 es equivalente a $\forall x \exists y [\forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)]$ (.5pts)

6. **Operaciones Fundamentales.** Sean a, b conjuntos no vacíos.

   (a) ¿Verdadero o falso: $\bigcup a \cap \bigcup b = \bigcup (a \cap b)$? (.2pts)

(b) ¿Verdadero o falso: $\bigcap\{\mathcal{P}(x)|x \in a\} = \mathcal{P}(\bigcap a)$? (.2pts)

(c) Demuestre que $a^c := \{x|x \notin a\}$ no es un conjunto. Sugerencia: Suponga que sí, concluya que existe el conjunto de todos los conjuntos. (.6pts)

7. **Interpretación de los axiomas.** En la gráfica dirigida de la figura 1, interprete $\forall x(\exists x)$ como: Para todo vértice de la gráfica G (Existe un vértice de la gráfica G), $x \in y$ como: "Hay una arista en la gráfica G que empieza en el vértice y y termina en el vértice x" (por ejemplo $1 \in 0$, pues en la gráfica está la arista $1 \leftarrow 0$).

   (a) ¿Son verdaderos los axiomas: $ZF_1^{(G,\leftarrow)}$,$ZF_1^{(G,\leftarrow)}$,$ZF_1^{(G,\leftarrow)}$,$ZF_2^{(G,\leftarrow)}$,$ZF_3^{(G,\leftarrow)}$,$ZF_4^{(G,\leftarrow)}$,$ZF_5^{(G,\leftarrow)}$,$ZF_6^{(G,\leftarrow)}$,$ABF^{(G,\leftarrow)}$ en la gráfica $(G,\leftarrow)$? Argumente para cada uno. (.7pts)

   (b) Argumente que en el estrato R_ω de la jerarquía acumulativa, al interpretar canónicamente a los axiomas son veraderos. ¿En R_ω existen conjuntos infinitos? (.3pts)