Tarea Examen II

Gabriel Cachoa Ocampo

Marzo 10, 2016

Este documento corresponde a la segunda tarea examen del curso de Teoría de Conjuntos 1. Se entrega el día 17 de Marzo en el salón y hora de clase, en los primeros 10 minutos (106 del Yelizcalli, de 12:00 a 12:10). La tarea se entrega en parejas o individualmente, y ambos reciben la misma calificación. SE CALIFICA SOBRE 10 PUNTOS. No hay tolerancia al plagio.

1. **Funcionales y Sistemas Compatibles de Funciones** Sean F y G funcionales.
   (a) $F = G$ si y sólo si
      i. $DOM(F) = DOM(G)$, y
      ii. $\forall x \in DOM(F)[F(x) = G(x)]$ (2 pts.)
   (b) F^{-1} es una funcional si y sólo si F es inyectiva. (1 pts.)
   (c) Sea $\mathcal{F}$ un sistema compatible de funciones
      i. $\bigcup \mathcal{F}$ es una funcional. (1.5 pts.)
      ii. $DOM(\bigcup \mathcal{F} = \bigcup\{DOM(f)|f \in \mathcal{F}\}$(.5 pts.)
      iii. $IMG(\bigcup \mathcal{F} = \bigcup\{IMG(f)|f \in \mathcal{F}\}$ (.5 pts.)
   (d) Para cualesquiera conjuntos x, y se tiene
   $< x, y >\in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}[< x, y >\in f]$ (1 pts.)
   (e) Si $\mathcal{F}$ es un sistema compatibles de funciones continuas ($\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$) . ¿Entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es una función continua? (.5pts)

2. **Relaciones de Equivalencia** Sea $I := \{x \in \mathbb{R}|0 \leq x \leq 1\}$. Para $X \subseteq I$ denótese por X(r) al conjunto de todos los números pertenecientes a I que tienen la forma $x + r + n$ donde $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. (Es decir $X(r) := \{x + r + n \in I|x \in X, n \in \mathbb{N}\}$).
   (a) Demuestre que la relación $\equiv_V \subseteq I \times I$ definida por $p \equiv_V q \Leftrightarrow p-q \in \mathbb{Q}$ es de equivalencia. (1 pts.)
   (b) Si $V \subseteq I$ es un conjunto de representantes de I para las clases de equivalencia módulo $\equiv_V$, entonces:
      i. Si $r, s \in I \cap \mathbb{Q}$ y $r \neq s$, entonces $V(r) \cap V(s) = \emptyset$. (1 pts.)
      ii. $I = \bigcup_{r \in I \cap \mathbb{Q}} V(r)$. (1 pts.)

Esta relación de equivalencia la descubrió el matemático italiano Giuseppe Vitali en 1905, más adelante probaremos que el conjunto de representantes para las clases de equivalencia módulo $\equiv_V$ sobre I existe bajo la suposición del axioma de elección y que éste no es Lebesgue medible.

3. **Buenos Órdenes** (Este ejercicio es opcional) Un isomorfismo entre dos conjuntos ordenados $< x, \leq >, < y, \preceq > \in COPO$ es una función biyectiva $h : x \to y$ tal que
$\forall a, b \in x(x \leq y \longleftrightarrow h(a) \preceq h(b)$. Diremos que dos órdenes parciales son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos. Una función creciente entre dos conjuntos ordenados $< x, \leq >, < y, \preceq > \in COPO$ cumple que $\forall a, b \in x(x \leq y \longrightarrow h(a) \preceq h(b))$.

   (a) Sea $< W, \leq > \in COBO$, $f : W \longrightarrow W$ creciente e inyectiva. Entonces, para cada $x \in W$, $f(x) \geq x$. (.5pts.)

   (b) El único ismorfismo de un conjunto bien ordenado en sí mismo es la identidad. (.5 pts.)

   (c) Si dos conjuntos bien ordenados son isomorfos, el isomorfismo es único. (.5pts.)